



第三章

随机信号和噪声分析

3.1 基本内容及学习要点

通信系统中传输的信号(如话音信号、视频信号等)本质上都具有随机性。具有随机特性的信号称为随机信号。随机信号的某个参数或几个参数是不能预知或不能完全预知的。此外,通信系统中遇到的各种干扰和噪声更是具有随机性。因此,称这种干扰和噪声为随机噪声,简称为噪声。对随机信号和噪声的分析是用统计学中有关随机过程的理论和方法进行的。

3.1.1 随机过程

1. 基本概念

随机过程 $X(t)$ 是一种取值随机变化的时间函数,它不能用确切的时间函数来表示。随机过程的取值虽然随机,但取各种值的可能性的分布规律通常是能够确切地获得的。也就是说随机过程有确切的统计规律,因此可以用严格的统计特性来描述随机过程。

2. 随机过程的理解

可从以下几个角度去理解随机过程:

① 随机过程是一种取值随机变化的时间函数,它不能用确切的时间函数来表示。例如,在时间函数 $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ 表示式中,有 A 、 ω_0 、 φ 三个参数,当这三个参数已知时,函数 $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ 是一个确定的信号,这时任意时间点上的信号值是确定的。但若 A 、 ω_0 、 φ 三个参数中任意一个或多个为随机变量(取值不确定)时,函数 $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ 就是随机过程了,因为这时任意时间点上的信号值是不确定的(随机变量)。

② 随机过程是由全部可能的实现(或样本函数 $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$) 构成的集合 $\{x_i(t)\}$ 。每个实现都是一个确定的时间函数,而随机性就体现在出现哪一个实现是不确定的。如通信系统中遇到的噪声是典型的随机过程。以噪声为例,它是由全部可能的实现($x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$) 构成的集合 $\{x_i(t)\}$ 。假设有 N 台性能完全相同的接收机,它们的工作条件也相同,然后测试这 N 台接收机各自的输出噪声。结果是 N 台接收机的输出噪声各不相同,即使 N 足够地大,也不会得到两个完全相同的结果,因为每台接收机的输出是噪声集合中的某个实现。但如果输出的是一个确定的时间函数,那么 N 台接收机将会得到 N 个相同的结果。

③ 对随机过程来说,“随机”的含义是指取值不确定,仅有取某个值的可能性;“过程”含义是指它为时间 t 的函数。

3. 基本特点

(1) 取值的随机性

在某一个固定时刻,如 $t = t_1$ 时,来观察随机过程的值 $X(t_1)$,它是一个随机变量;在不同的 t_1, t_2, \dots, t_n 时刻考察随机过程时,得到不同的随机变量。

(2) 样本的确定性

随机过程可看成是一个由全部可能的实现(或样本函数)构成的集合 $\{x_i(t)\}$,每个实现都是一个确定的时间函数,而随机性就体现在出现哪一个实现是不确定的。

4. 统计特性

(1) 分布函数和概率密度函数

一维分布函数为

$$F_1(x_1, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \quad (3.1)$$

其含义为:随机过程在 $t = t_1$ 时刻对应的随机变量 $X(t_1)$ 的分布函数,即 $X(t_1) \leq x_1$ 的概率。

一维概率密度函数为

$$f_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} \quad (3.2)$$

二维分布函数为





$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2\} \quad (3.3)$$

其含义为:随机过程在 $t = t_1$ 及 $t = t_2$ 时得到的随机变量 $X(t_1)$ 及 $X(t_2)$ 的分布函数,即 $X(t_1) \leq x_1$ 及 $X(t_2) \leq x_2$ 同时满足的概率。

二维概率密度函数为

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.4)$$

同理,称下式

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (3.5)$$

为随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数。称下式

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (3.6)$$

为随机过程 $X(t)$ 的 n 维概率密度函数。

(2) 数字特征

① 数学期望(均值)。

$$a(t_1) = E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot f_1(x_1, t_1) dx_1 \quad (3.7)$$

其含义为: $t = t_1$ 时,随机变量 $X(t_1)$ 的数学期望。上式中, t_1 取任意值 t 时,得到随机过程的数学期望为

$$a(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x, t) dx \quad (3.8)$$

② 方差。

$$D[X(t_1)] = E\{[X(t_1) - a(t_1)]^2\} = \sigma^2(t_1)$$

其含义为: $t = t_1$ 时,随机变量 $X(t_1)$ 的方差。上式中, t_1 取任意值 t 时,得到随机过程的方差为

$$\sigma^2(t) = D[X(t)] = E\{[X(t) - a(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot f_1(x, t) dx \quad (3.9)$$

式(3.9)还可以写为

$$\sigma^2(t) = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] \quad (3.10)$$

③ 协方差函数。

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - a(t_1)][X(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

其含义为:对随机过程在 $t = t_1$ 及 $t = t_2$ 任意两个时刻上的随机变量与各自均值的差值之间的相关性进行描述。

④ 自相关函数。

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.12)$$

其含义为:对随机过程在 $t = t_1$ 及 $t = t_2$ 任意两个时刻上的随机变量之间的相关性进行描述。

⑤ $B(t_1, t_2)$ 与 $R(t_1, t_2)$ 的关系。

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - E[X(t_1)] \cdot E[X(t_2)] \quad (3.13)$$

3.1.2 平稳随机过程

平稳随机过程是应用广泛的一类随机过程。一般地说,通信系统中遇到的随机信号和噪声都是平稳随机过程。

1. 定义

任意 n 维概率密度函数与时间起点无关的随机过程称为平稳随机过程。即

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned} \quad (3.14)$$

2. 含义

平稳随机过程的统计特性不随时间的变化而改变,即其统计特性是平稳的。

3. 特点

① 平稳随机过程的一维概率密度函数与考察时刻 t_1 无关。即

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1, t_1 + \tau) = f_1(x_1) \quad (3.15)$$

② 平稳随机过程的二维概率密度函数与考察时间的起点 t_1 无关,而仅与考察时间间隔 τ 有关,是 τ 的函数。即

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; \tau) \quad (3.16)$$

式中, $\tau = t_2 - t_1$, 为两个考察时刻 t_1, t_2 之间的时间间隔。

③ 平稳随机过程的数学期望(均值)和方差都是常数。即

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = a \quad (3.17)$$

$$D[X(t)] = E\{[X(t) - a]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot f_1(x) dx = \sigma^2 \quad (3.18)$$

④ 平稳随机过程的自相关函数仅与时间间隔 τ 有关,是 τ 的函数,而与考察时间起点无关。即

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau) \end{aligned} \quad (3.19)$$





4. 自相关函数的性质

① $R(\tau)$ 是 τ 的偶函数, 即 $R(\tau) = R(-\tau)$ 。

② 自相关函数具有递减特性, 即 $|R(\tau)| \leq R(0)$ 。当 $\tau = 0$ 时, 自相关函数有最大值。

③ $R(0)$ 为平稳随机过程的平均功率 P , 即 $R(0) = E[X^2(t)] = P$ 。

④ $R(\infty)$ 为平稳随机过程 $X(t)$ 的直流功率 a^2 , 即 $R(\infty) = E^2[X(t)] = a^2$ 。

⑤ $R(0) - R(\infty)$ 为平稳随机过程 $X(t)$ 的方差 σ^2 , 即 $\sigma^2 = R(0) - R(\infty)$ 。

结论: 平稳随机过程的方差为交流功率。平稳随机过程均值为零时, 其方差等于平均功率 P 。

5. 狭义平稳随机过程与广义平稳随机过程

(1) 狭义平稳随机过程

任意 n 维概率密度函数与时间的起点无关的随机过程。狭义平稳随机过程又称为窄平稳随机过程。

(2) 广义平稳随机过程

数学期望及方差与时间 t 无关, 而自相关函数仅与时间间隔 τ 有关的随机过程。广义平稳随机过程又称为宽平稳随机过程。

注意: 狭义平稳随机过程一定是广义平稳随机过程, 但反之不一定成立。

3.1.3 随机过程的各态历经性(遍历性)

1. 含义

对随机过程中的任意一实现(样本函数)来说, 它好像经历了随机过程中所有可能的状态一样。

2. 意义

求具有各态历经性的随机过程的数字特征时, 无需获得过程大量的样本函数进行集合平均(统计平均), 只需得到一个样本函数进行时间平均就可以了, 从而将求集合平均的问题化为求时间平均的问题, 可大大简化计算过程。

注意: 具有各态历经性的随机过程一定是平稳随机过程, 但平稳随机过程不一定都具有各态历经性。

3. 平稳随机过程具有各态历经性的条件

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R(\tau) d\tau = 0$$

平稳随机过程只要满足以上条件时, 就具有各态历经性。其含义是平稳随机过程的自相关函数 $R(\tau)$ 在整个时间区间内平均值为零。一般来说, 通信系统中遇到的有用信号或噪声均能满足这个条件, 因此, 都将它们视为各态历经平稳随机过程。

3.1.4 平稳随机过程自相关函数与功率谱密度的关系

1. 维纳 - 欣钦定理

与确定信号的自相关函数与功率谱密度之间是一对傅里叶变换关系一样, 平稳随机过程的自相关函数 $R(\tau)$ 与功率谱密度 $P(\omega)$ 之间有以下关系

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.20)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.21)$$

以上关系称为维纳 - 欣钦 (Wiener-Khintchine) 定理。

2. 自相关时间 τ_k

$$\tau_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau}{2R(0)} \quad (3.22)$$

3. 等效带宽 Δf

$$\Delta f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P(f) df}{2P(0)} \quad (3.23)$$

且有

$$\tau_k \cdot \Delta f = \frac{P(0)}{2R(0)} \cdot \frac{R(0)}{2P(0)} = \frac{1}{4} \quad (3.24)$$

结论: 自相关时间与等效带宽共同描述了平稳随机过程的自相关性的强弱程度, 自相关时间越大, 等效带宽越小, 表明平稳随机过程自相关性越强; 反之, 表明平稳随机过程自相关性越弱。

4. 两种极端情况

① $\tau_k = 0, \Delta f \rightarrow \infty$ 。

此时随机过程的自相关性最弱, 这时的随机过程实际上就是白色随机过程 (白色噪声)。

② $\tau_k = \infty, \Delta f = 0$ 。

此时随机过程的自相关性最强, 这时的随机过程实际上是直流信号。

3.1.5 两个随机过程之间的统计联系

实际系统中, 常常需要研究两个或多个随机过程同时出现的情况。例如, 通信系统中就需要同时考虑有用信号 $x(t)$ 与噪声 $n(t)$ 之间的统计联系。

1. 联合分布函数

$$\begin{aligned} & F_{n+m}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m) \\ &= P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n; Y(t'_1) \leq y_1, \dots, Y(t'_m) \leq y_m\} \end{aligned} \quad (3.25)$$





2. 联合概率密度函数

$$\begin{aligned} & f_{n+m}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m) \\ &= \frac{\partial F_{n+m}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n \partial y_1 \cdots \partial y_m} \end{aligned} \quad (3.26)$$

3. 统计独立

若随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 对任意 $n+m$ 的值, 都有下式成立

$$\begin{aligned} & f_{n+m}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m) \\ &= f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \cdot f_m(y_1, \dots, y_m; t'_1, \dots, t'_m) \end{aligned} \quad (3.27)$$

则称随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 统计独立。

4. 互不相关

定义随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互协方差函数 $B_{XY}(t_1, t_2)$ 为

$$\begin{aligned} B_{XY}(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - a_X(t_1)][Y(t_2) - a_Y(t_2)]\} \\ &= R_{XY}(t_1, t_2) - E[X(t_1)]E[Y(t_2)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

若满足 $B_{XY}(t_1, t_2) = 0$ 时, 称随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互不相关。

注意: 如果随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是统计独立的, 则它们一定互不相关。但如果随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互不相关, 它们不一定统计独立。这是因为, 统计独立是在任意 $n+m$ 值的条件下得到的, 而互不相关只考虑了 t_1 和 t_2 两个时刻。

3.1.6 正态随机过程

正态随机过程又称为高斯(Gaussian)随机过程, 是一种常见而又重要的随机过程。通信系统中的噪声就是典型的正态随机过程。

1. 定义

任意 n 维概率密度函数都服从正态分布的随机过程称为正态随机过程。

2. 性质

① 正态随机过程如果是广义平稳的, 则也是狭义平稳的。

② 正态随机过程的线性变换仍是正态随机过程。

该性质表明, 线性变换不改变正态随机过程的统计特性, 但会改变正态随机过程的数字特征值。

③ 如果两个正态随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 互不相关, 则它们也统计独立。

注意: 性质①及③对一般的随机过程来说并不成立, 但对正态随机过程是例外。

3.1.7 平稳随机过程通过线性系统

当线性系统的输入是平稳随机过程 $X(t)$ 时, 输出 $Y(t)$ 也是随机过程, 且

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的关系为

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau \quad (3.29)$$

1. $Y(t)$ 的数字特征

(1) 数学期望

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t - \tau)] d\tau = a \cdot H(0) \quad (3.30)$$

式中, $E[X(t - \tau)] = a$ 为 $X(t)$ 的数学期望, $H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau$ 。

(2) 自相关函数

$$R_Y(t, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma) h(\sigma) R_X(\tau + \gamma - \sigma) d\gamma d\sigma = R_Y(\tau) \quad (3.31)$$

式中, $E[X(t - \gamma)X(t + \tau - \sigma)] = R_X(\tau + \gamma - \sigma)$ 为 $X(t)$ 的自相关函数。

结论: 输出随机过程 $Y(t)$ 至少是广义平稳随机过程。

2. $Y(t)$ 的功率谱密度

$$P_Y(\omega) = P_X(\omega) \cdot H^*(\omega) \cdot H(\omega) = P_X(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \quad (3.32)$$

式中, $P_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ 为输入随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度。

3.1.8 加性高斯白噪声

1. 噪声来源

对通信系统来说, 噪声分为外部噪声和内部噪声, 这些噪声以相加的方式对有用信号产生影响, 故总称为加性噪声。外部噪声主要由信道引入, 包括人为噪声、工业干扰和天电噪声。内部噪声是由通信设备内部产生的一种干扰, 主要包括散弹噪声及热噪声。它对信号的影响最为严重, 是研究的重点。

① 散弹噪声: 通信设备中有源器件内部的载流子或电子发射的不均匀性引起的一种起伏过程。

② 热噪声: 由通信设备中电阻类器件(如天线)内部的电子热运动(布朗运动)引起的一种起伏过程, 也称为电阻热噪声。

2. 噪声性质

散弹噪声及热噪声都是服从高斯分布的白噪声。因此加性噪声也称为加性高斯白噪声(AWGN)。

理想白噪声(白色随机过程)是一个非自相关的随机过程, 它包含有自零至无穷大的所有频谱分量, 这类似于光学中包括有全部可见光谱的白光, 故名白噪声。因此, 白噪声的功率谱密度是一个常数, 为





双边功率谱:
$$P(f) = \frac{n_0}{2}, -\infty < f < +\infty \quad (3.33)$$

单边功率谱:
$$P(f) = n_0, 0 < f < +\infty \quad (3.34)$$

由维纳 - 欣钦定理, 可得到白噪声的自相关函数为

$$R(\tau) = \mathcal{F}^{-1} [P(\omega)] = \frac{n_0}{2} \delta(\tau) \quad (3.35)$$

白噪声的功率谱密度及自相关函数如图 3.1 所示。

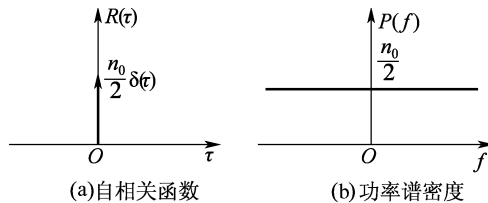


图 3.1 白噪声的功率谱密度及自相关函数

3.1.9 白色随机过程通过窄带线性系统——窄带噪声

白噪声通过窄带线性系统后的输出噪声称为窄带噪声。

1. 功率谱密度

$$P_{n_i}(\omega) = P(\omega) |H(\omega)|^2 = \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2 \quad (3.36)$$

2. 自相关函数

由维纳 - 欣钦定理, 窄带噪声的自相关函数为

$$R_{n_i}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_i}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} |H(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.37)$$

当窄带线性系统具有理想的带通传输特性时, 窄带噪声的功率谱密度为

$$P_{n_i}(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2} & f_0 - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3.38)$$

对应的自相关函数为

$$P_{n_i}(\tau) = 2 \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = n_0 B \text{Sa}(\pi B\tau) \cos\omega_0 t \quad (3.39)$$

$P_{n_i}(f)$ 及 $R_{n_i}(\tau)$ 对应的曲线如图 3.2 所示。

此时, 可计算出窄带噪声的功率为

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} P_{n_i}(f) df = n_0 B$$

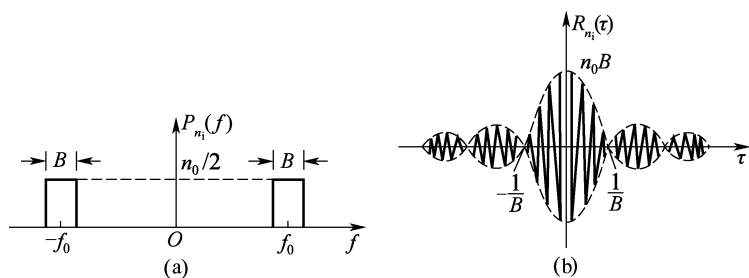


图 3.2 理想传输特性时窄带噪声的功率谱密度及自相关函数

3. 窄带噪声的波形特征

窄带噪声的波形具有“准正弦波”的特征,即窄带噪声的波形是一个频率近似为 f_0 , 包络和相位缓慢变化的正弦波,如图 3.3 所示。

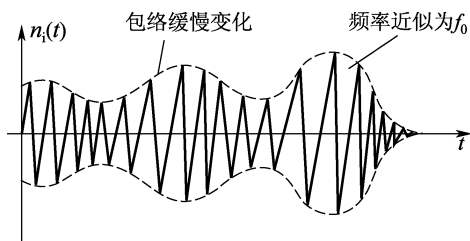


图 3.3 窄带噪声的波形特征

4. 窄带噪声表示形式

(1) 包络和相位形式

$$n_i(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)] \quad (3.40)$$

(2) 同相和正交分量形式

$$n_i(t) = n_c(t) \cos\omega_0 t - n_s(t) \sin\omega_0 t \quad (3.41)$$

5. $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 以及 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 的统计特性

(1) $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 的统计特性

① 均值。

$$E[n_s(t)] = E[n_c(t)] = 0 \quad (3.42)$$

② 自相关函数。

$$R_{n_i}(0) = R_{n_c}(0) = R_{n_s}(0) \quad (3.43)$$

上式表明, $n_i(t)$ 和 $n_c(t)$ 及 $n_s(t)$ 具有相同的方差或功率,即

$$\sigma_{n_i}^2 = \sigma_{n_c}^2 = \sigma_{n_s}^2 = \sigma^2 \quad (3.44)$$

此外,还有以下关系





$$R_{n_c n_s}(0) = R_{n_c n_s}(0) = 0 \quad (3.45)$$

上式表明, $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 在同一时刻是互不相关的随机过程, 因而由正态(高斯)随机过程的性质可知, 它们也是统计独立的随机过程。

结论: 窄带噪声 $n_i(t)$ 的同相分量 $n_c(t)$ 及正交分量 $n_s(t)$ 是均值为零, 统计独立的平稳高斯随机过程, 其方差或功率相同, 且等于窄带噪声 $n_i(t)$ 的方差或功率。

(2) $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 的统计特性

$R(t)$ 和 $\theta(t)$ 的二维联合概率密度函数 $f_{R\theta}(R, \theta)$ 为

$$f_{R\theta}(R, \theta) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.46)$$

① $R(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_R(R) = \frac{R}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right] \quad 0 \leq R < \infty \quad (3.47)$$

上式表明, $R(t)$ 服从瑞利(Rayleigh)分布。

② $\theta(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.48)$$

上式表明, $\theta(t)$ 服从均匀分布。

此外, 由于 $f_{R\theta}(R, \theta) = f_R(R) \cdot f_\theta(\theta)$, 因此 $R(t)$ 和 $\theta(t)$ 还是统计独立的(一维分布时)。

(3) $R(t)$ 的特点

① $R = \sigma$ 时, $f_R(R)$ 出现最大值 $\frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\right]$ 。即包络取 σ 的可能性最大;

② 包络的期望值为 $E[R(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$;

③ 包络的中位值为 $R_1 = 1.177\sigma$; 所谓中位值是指累积分布概率为 50% 时的包络值。

④ 包络的均方值为 $E[R^2(t)] = 2\sigma^2$;

⑤ 包络的方差为 $D[R(t)] = E\{[R - E(R)]^2\} = \left[2 - \frac{\pi}{2}\right]\sigma^2$ 。

3.1.10 正弦波加窄带高斯噪声

1. 合成信号包络 $Q(t)$ 的统计特性

$$f_Q(Q) = \frac{Q}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{Q^2 + A^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left[\frac{AQ}{\sigma^2}\right] \quad Q \geq 0 \quad (3.49)$$

上式表明,正弦波加窄带高斯噪声的合成信号包络 $Q(t)$ 服从广义瑞利分布,也称为莱斯(Rice)分布。

2. $Q(t)$ 分布与信噪比 $A^2/2\sigma^2$ 的关系

$Q(t)$ 分布与信道中的广义信噪比 $A^2/2\sigma^2$ 有关。

① $A^2/2\sigma^2$ 很小(此时 A 值很小,噪声起主要作用)时, $Q(t)$ 服从瑞利分布。

② $A^2/2\sigma^2$ 很大(此时, A 值很大,信号起主要作用)时, $Q(t)$ 近似服从正态分布。

③ $A^2/2\sigma^2$ 不大不小时, $Q(t)$ 服从广义瑞利分布。

特别地,当 $A=0$ 时,由于 $I_0(0)=1$,式(3.49)变为了式(3.47),这时合成信号实际为窄带高斯噪声。

3. 合成信号相位 $\varphi(t)$ 的统计特性

$\varphi(t)$ 的统计特性也与信道中的信噪比有关,当信噪比很小时,随机相位 $\varphi(t)$ 接近均匀分布;当信噪比很大时,随机相位主要集中在信号的相位附近。

3.2 典型例题分析

例 3.1 设随机过程 $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, 式中, A 和 ω_0 均为常数; θ 是一个随机变量,它在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 范围内取值且服从均匀分布。试求随机过程 $X(t)$ 的以下量:

(1) 均值;(2) 方差;(3) 自相关函数;(4) 功率谱密度及总平均功率。

思路: 利用随机过程的均值、方差、自相关函数和功率谱密度的定义及相互关系计算。

解: θ 的概率密度函数为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) $X(t)$ 的均值为

$$\begin{aligned} a(t) &= E[X(t)] = E[A\cos(\omega_0 t + \theta)] \\ &= E[A\cos\omega_0 t \cos\theta - A\sin\omega_0 t \sin\theta] \\ &= A\cos\omega_0 t \cdot E[\cos\theta] - A\sin\omega_0 t \cdot E[\sin\theta] \\ &= A\cos\omega_0 t \int_0^\pi \cos\theta \frac{1}{\pi} d\theta - A\sin\omega_0 t \int_0^\pi \sin\theta \frac{1}{\pi} d\theta \\ &= A\cos\omega_0 t \cdot 0 - A\sin\omega_0 t \cdot \frac{2}{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi} A\sin\omega_0 t \end{aligned}$$





(2) $X(t)$ 的方差为

$$\begin{aligned}
 D[X(t)] &= E\{[X(t) - a(t)]^2\} = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] \\
 &= E[A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta)] - E^2[X(t)] = \frac{A^2}{2} E[1 + \cos 2(\omega_0 t + \theta)] - E^2[X(t)] \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} E[\cos 2(\omega_0 t + \theta)] - E^2[X(t)] \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} [\cos 2\omega_0 t \cdot E[\cos 2\theta] - A \sin 2\omega_0 t \cdot E[\sin 2\theta]] - E^2[X(t)] \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \left[\cos 2\omega_0 t \cdot \int_0^\pi \cos 2\theta \frac{1}{\pi} d\theta - A \sin 2\omega_0 t \cdot \int_0^\pi \sin 2\theta \frac{1}{\pi} d\theta \right] - E^2[X(t)] \\
 &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} [\cos 2\omega_0 t \cdot 0 - A \sin 2\omega_0 t \cdot 0] - E^2[X(t)] = \frac{A^2}{2} - \left[-\frac{2}{\pi} A \sin \omega_0 t \right]^2 \\
 &= \frac{A^2}{2} - \frac{4}{\pi^2} A^2 \sin^2 \omega_0 t
 \end{aligned}$$

(3) $X(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\
 &= E[A^2 \cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta)] \\
 &= \frac{A^2}{2} E[\cos \omega_0 \tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\
 &= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau + \frac{A^2}{2} E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] \\
 &= \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau = R(\tau)
 \end{aligned}$$

(4) $X(t)$ 的功率谱密度

由于功率谱密度与自相关函数为一对傅里叶变换,且有

$$\cos \omega_0 \tau \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

故

$$P(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$X(t)$ 的平均功率为 $P = R(0) = \frac{A^2}{2}$ 。

例 3.2 随机过程 $X(t)$ 为平稳随机过程, $R_X(\tau)$ 为 $X(t)$ 的自相关函数, $X(t)$ 的功率谱为 $P_X(\omega)$, $Y(t) = X(t) \cdot (-\sin \omega_0 t)$, 求:

- (1) $Y(t)$ 的自相关函数, $Y(t)$ 是否为平稳过程?
- (2) $Y(t)$ 的功率谱密度。

思路: 利用平稳随机过程的自相关函数的特点判断。

解: (1) $Y(t)$ 的自相关函数可由自相关函数的定义得到

$$\begin{aligned}
 R_Y(t, t + \tau) &= E[Y(t)Y(t + \tau)] \\
 &= E[X(t)X(t + \tau)\sin\omega_0 t \sin\omega_0(t + \tau)] \\
 &= \frac{1}{2}E[X(t)X(t + \tau)][\cos\omega_0\tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)] \\
 &= \frac{1}{2}R_X(\tau)[\cos\omega_0\tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)]
 \end{aligned}$$

由上可见, $Y(t)$ 的自相关函数与时间 t 有关, 所以 $Y(t)$ 不是平稳随机过程。

(2) $Y(t)$ 的功率谱密度

非平稳随机过程的自相关函数既与时间 t 有关又与时间间隔 τ 有关。对非平稳随机过程求功率谱时, 要将其自相关函数求时间平均, 再进行傅里叶变换。

$$\begin{aligned}
 P_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_Y(t, t + \tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ \frac{1}{2} R_X(\tau) [\cos\omega_0\tau + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)] \right\} dt \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos\omega_0\tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ \frac{1}{2} R_X(\tau) [\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau)] \right\} dt \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos\omega_0\tau + 0 \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos\omega_0\tau \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{4} [P_X(\omega - \omega_0) + P_X(\omega + \omega_0)]
 \end{aligned}$$

注意: 通信系统中, 同步解调时要用到乘法运算。

例 3.3 在某系统中, 已知输出 $Y(t) = X(t) - X(t - T)$ 。若 $X(t)$ 为平稳随机过程, 自相关函数为 $R_X(\tau)$ 。试:

(1) 求输出 $Y(t)$ 的自相关函数 $R_Y(\tau)$ 及功率谱密度函数 $P_Y(\omega)$;

(2) 若 $Z(\omega) = \frac{1}{j\omega} Y(\omega)$, $Z(t)$ 和 $Z(\omega)$ 为一对傅里叶变换, 求 $Z(t)$ 的功率谱密度函数 $P_Z(\omega)$ 。

解: (1) 方法一:

自相关函数为

$$\begin{aligned}
 R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t + \tau)] \\
 &= E\{ [X(t) - X(t - T)] [X(t + \tau) - X(t + \tau - T)] \} \\
 &= E[X(t)X(t + \tau)] - E[X(t)X(t + \tau - T)] - \\
 &\quad E[X(t - T)X(t + \tau)] + E[X(t - T)X(t + \tau - T)] \\
 &= R_X(\tau) - R_X(\tau - T) - R_X(\tau + T) + R_X(\tau) \\
 &= 2R_X(\tau) - R_X(\tau - T) - R_X(\tau + T)
 \end{aligned}$$





第三章 随机信号和噪声分析

功率谱密度为

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= 2P_X(\omega) - P_X(\omega)e^{-j\omega T} - P_X(\omega)e^{j\omega T} \\ &= 2(1 - \cos\omega T)P_X(\omega) \end{aligned}$$

方法二:

由题意可得

$$\begin{aligned} H_{YX}(\omega) &= \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = 1 - e^{-j\omega T} \\ &= e^{-j\frac{\omega T}{2}} \left[e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}} \right] \\ &= 2j\sin\frac{\omega T}{2} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= |H_Y(\omega)|^2 \cdot P_X(\omega) = \left| 2j\sin\frac{\omega T}{2} e^{-j\frac{\omega T}{2}} \right|^2 \cdot P_X(\omega) \\ &= 4\sin^2\frac{\omega T}{2} \cdot P_X(\omega) \\ &= 2(1 - \cos\omega T)P_X(\omega) \end{aligned}$$

(2) 方法一:

由题意可得

$$\begin{aligned} H_{ZY}(\omega) &= \frac{Z(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{1}{j\omega} \\ P_Z(\omega) &= |H_{ZY}(\omega)|^2 \cdot P_Y(\omega) \\ &= \left| \frac{1}{j\omega} \right|^2 \cdot P_Y(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \cdot 4\sin^2\frac{\omega T}{2} \cdot P_X(\omega) \\ &= T^2 \text{Sa}^2\left[\frac{\omega T}{2}\right] \cdot P_X(\omega) \end{aligned}$$

方法二:

由题意可得

$$\begin{aligned} H_{ZX}(\omega) &= \frac{Z(\omega)}{X(\omega)} = H_{ZY}(\omega) H_{YX}(\omega) \\ &= \frac{Z(\omega)}{Y(\omega)} \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ &= e^{-j\frac{\omega T}{2}} \left[e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}} \right] \cdot \frac{1}{j\omega} = 2 \frac{1}{\omega} \sin\frac{\omega T}{2} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \\ &= T \text{Sa}\left[\frac{\omega T}{2}\right] \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \end{aligned}$$

故

$$P_z(\omega) = |H_z(\omega)|^2 \cdot P_x(\omega) = \left| T \text{Sa} \left[\frac{\omega T}{2} \right] \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \right|^2 \cdot P_x(\omega)$$

$$= T^2 \text{Sa}^2 \left[\frac{\omega T}{2} \right] \cdot P_x(\omega)$$

例 3.4 已知随机过程 $z(t) = m(t) \cos(\omega_0 t + \theta)$ 。其中, 相位 θ 是一随机变量, θ 在 $(0, 2\pi)$ 为均匀分布。 $m(t)$ 是广义平稳随机过程, $m(t)$ 与 θ 是统计独立的, $m(t)$ 的自相关函数 $R_m(\tau)$ 为

$$R_m(\tau) = \begin{cases} 1 + \tau & -1 < \tau < 0 \\ 1 - \tau & 0 \leq \tau < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 证明 $z(t)$ 是广义平稳随机过程;
- (2) 求 $z(t)$ 的自相关函数 $R_z(\tau)$;
- (3) 求 $z(t)$ 的功率谱密度 $P_z(\omega)$ 及功率 S 。

解: (1) 证明: $z(t)$ 的均值 $a_z(t)$ 为

$$\begin{aligned} a_z(t) &= E[z(t)] = E[m(t) \cos(\omega_0 t + \theta)] \\ &= E[m(t)] \cdot E[\cos(\omega_0 t + \theta)] \quad (m(t) \text{ 与 } \theta \text{ 相互独立}) \\ &= E[m(t)] \cdot E(\cos \omega_0 t \cos \theta - \sin \omega_0 t \sin \theta) \\ &= E[m(t)] \cdot \cos \omega_0 t E(\cos \theta) - \sin \omega_0 t E(\sin \theta) \end{aligned}$$

由于 $m(t)$ 是广义平稳随机过程, 所以 $m(t)$ 的数学期望 $E[m(t)]$ 为常数。相位 θ 是一随机变量, 在 $(0, 2\pi)$ 内均匀分布, 可得

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$E(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} (\cos \theta) f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\theta = 0$$

$$E(\sin \theta) = \int_0^{2\pi} (\sin \theta) f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\theta = 0$$

所以, $a_z(t) = 0$, 为常数。

$z(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_z(t_1, t_2) &= E[z(t_1)z(t_2)] \\ &= E[m(t_1) \cdot \cos(\omega_0 t_1 + \theta) \cdot m(t_2) \cdot \cos(\omega_0 t_2 + \theta)] \\ &= E[m(t_1) \cdot m(t_2)] \cdot E[\cos(\omega_0 t_1 + \theta) \cdot \cos(\omega_0 t_2 + \theta)] \\ &= R_m(t_1, t_2) \cdot E \left\{ \frac{1}{2} \cos[2\theta + \omega_0(t_1 + t_2)] + \frac{1}{2} \cos \omega_0(t_1 - t_2) \right\} \\ &= R_m(t_1, t_2) \cdot \left\{ E \left[\frac{1}{2} \cos[2\theta + \omega_0(t_1 + t_2)] \right] + E \left[\frac{1}{2} \cos \omega_0(t_1 - t_2) \right] \right\} \\ &= R_m(\tau) \cdot \left\{ E \left[\frac{1}{2} \cos[2\theta + \omega_0(t_1 + t_2)] \right] + E \left[\frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau \right] \right\} \quad (\text{因 } m(t) \text{ 为} \end{aligned}$$





广义平稳, $\tau = t_2 - t_1$)

$$= R_m(\tau) \cdot \left\{ E \left[\frac{1}{2} \cos[2\theta + \omega_0(t_1 + t_2)] \right] + \frac{1}{2} \cos\omega_0\tau \right\}$$

由于

$$\begin{aligned} E \left[\frac{1}{2} \cos[2\theta + \omega_0(t_1 + t_2)] \right] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[2\theta + \omega_0(t_1 + t_2)] f(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[2\theta + \omega_0(t_1 + t_2)] \frac{1}{2\pi} d\theta = 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} R_z(t_1, t_2) &= R_m(\tau) \cdot \left[0 + \frac{1}{2} \cos\omega_0\tau \right] \\ &= R_m(\tau) \cdot \frac{1}{2} \cos\omega_0\tau \\ &= R_z(\tau) \end{aligned}$$

由上可见, $z(t)$ 的均值 $a_z(t)$ 为常数, $z(t)$ 的自相关函数 $R_z(\tau)$ 与时间起点 t 无关, 仅与时间间隔 τ 有关, 故 $z(t)$ 为广义平稳随机过程。

(2) $z(t)$ 的自相关函数 $R_z(\tau)$ 为

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \frac{1}{2} R_m(\tau) \cdot \cos\omega_0\tau \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \tau) \cos\omega_0\tau & -1 < \tau < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \tau) \cos\omega_0\tau & 0 \leq \tau < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 由于 $z(t)$ 为广义平稳过程, 所以其功率谱密度与自相关函数为一对傅里叶变换。

因此

$$\begin{aligned} P_z(\omega) &= \mathcal{F}[R_z(\tau)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] * \frac{1}{2} \text{Sa}^2 \left[\frac{\omega}{2} \cdot 1 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\text{Sa}^2 \left[\frac{\omega + \omega_0}{2} \right] + \text{Sa}^2 \left[\frac{\omega - \omega_0}{2} \right] \right] \end{aligned}$$

求 $z(t)$ 功率 S 有两种方法。

方法一:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_z(\omega) d\omega = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\text{Sa}^2 \left[\frac{\omega + \omega_0}{2} \right] + \text{Sa}^2 \left[\frac{\omega - \omega_0}{2} \right] \right] d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\text{Sa}^2 \left[\frac{\omega - \omega_0}{2} \right] \right] d\omega = \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\text{Sa}^2 \left[\frac{\omega - \omega_0}{2} \right] \right] d \left[\frac{\omega - \omega_0}{2} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}$$

(注意:定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}^2 x dx = \pi$)

方法二:
$$S = R_z(0) = \frac{1}{2}$$

例 3.5 某系统如图 3.4 所示, $H_1(\omega)$ 和 $H_2(\omega)$ 为线性系统, 输入 $X(t)$ 是平稳随机过程, 其功率谱密度函数为 $P_X(\omega)$ 。求输出过程 $Y_1(t)$ 及 $Y_2(t)$ 的互谱密度函数。

思路: 利用随机过程互相关函数和互谱密度函数的定义和其相互之间的关系求解。

解: 设 $H_1(\omega)$ 、 $H_2(\omega)$ 的冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$, 则有

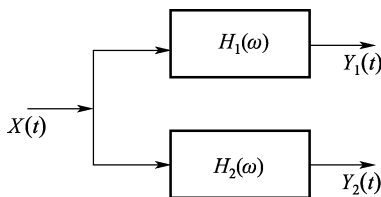


图 3.4 例 3.5 图

$$Y_1(t) = X(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u)h_1(u)du$$

$$Y_2(t) = X(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-v)h_2(v)dv$$

由于输入随机过程 $X(t)$ 是平稳的, 所以随机过程 $Y_1(t)$ 和 $Y_2(t)$ 也是平稳的, 其互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= E[Y_1(t)Y_2(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u)h_1(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau-v)h_2(v)dv\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t-u)X(t+\tau-v)]h_1(u)h_2(v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+u-v)h_1(u)h_2(v)dudv \end{aligned}$$

由于随机过程互相关函数和互谱密度函数之间为傅里叶变换对, 故有

$$\begin{aligned} P_{12}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau+u-v)h_1(u)h_2(v)dudve^{-j\omega\tau}d\tau \end{aligned}$$

令 $\tau' = \tau + u - v$, 则

$$\tau = \tau' - u + v$$

那么

$$d\tau = d\tau', e^{-j\omega\tau} = e^{-j\omega\tau'} e^{j\omega u} e^{-j\omega v}$$

最后得

$$P_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(u)e^{j\omega u}du \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(v)e^{-j\omega v}dv \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau')e^{-j\omega\tau'}d\tau'$$





$$= H_1^*(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot P_X(\omega)$$

例 3.6 已知 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是统计独立的平稳随机过程, 设它们的自相关函数分别为 $R_X(\tau)$ 和 $R_Y(\tau)$ 。求 $Z(t) = X(t)Y(t)$ 的自相关函数。

解:

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= R_Z(t, t+\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)] \\ &= E\{ [X(t)Y(t)] [X(t+\tau)Y(t+\tau)] \} \\ &= E\{ [X(t)X(t+\tau)] [Y(t)Y(t+\tau)] \} \\ &= E[X(t)X(t+\tau)] \cdot E[Y(t)Y(t+\tau)] \quad (\text{由于 } X(t) \text{ 和 } Y(t) \text{ 统计独立}) \\ &= R_X(t, t+\tau) \cdot R_Y(t, t+\tau) \\ &= R_X(\tau) \cdot R_Y(\tau) \quad (\text{由于 } X(t) \text{ 和 } Y(t) \text{ 平稳}) \\ &= R_Z(\tau) \end{aligned}$$

由本题可见, 两个平稳随机过程如果统计独立, 其乘积 $Z(t)$ 也是平稳的。

例 3.7 已知 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 是相互独立的平稳高斯随机过程, $X_1(t)$ 的数学期望为 a_1 , 方差为 σ_1^2 , $X_2(t)$ 的数学期望为 a_2 , 方差为 σ_2^2 , 设 $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$, 试求:

- (1) 随机过程 $X(t)$ 的数学期望 a 和方差 σ^2 ;
- (2) 随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度函数。

思路: 利用随机过程数字特征和概率密度函数的定义求解。

解: (1) 数学期望为

$$\begin{aligned} a &= E[X(t)] = E[X_1(t) + X_2(t)] \\ &= E[X_1(t)] + E[X_2(t)] = a_1 + a_2 \end{aligned}$$

方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= D[X(t)] = E\{ [X_1(t) + X_2(t)]^2 \} - E^2[X_1(t) + X_2(t)] \\ &= E[X_1^2(t) + 2X_1(t)X_2(t) + X_2^2(t)] - (a_1 + a_2)^2 \\ &= E[X_1^2(t)] + 2E[X_1(t)] \cdot E[X_2(t)] + E[X_2^2(t)] - (a_1 + a_2)^2 \end{aligned}$$

由于

$$D[X_1(t)] = \sigma_1^2, D[X_2(t)] = \sigma_2^2 \text{ 且 } D[X(t)] = E[X^2(t)] - E^2[X(t)]$$

故有

$$E[X_1^2(t)] = \sigma_1^2 + a_1^2, E[X_2^2(t)] = \sigma_2^2 + a_2^2$$

最后得

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[X_1^2(t)] + 2E[X_1(t)] \cdot E[X_2(t)] + E[X_2^2(t)] - (a_1 + a_2)^2 \\ &= \sigma_1^2 + a_1^2 + 2a_1a_2 + \sigma_2^2 + a_2^2 - a_1^2 - 2a_1a_2 - a_2^2 \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{aligned}$$

(2) 已知 $X_1(t)$ 和 $X_2(t)$ 是相互独立的平稳高斯随机过程, $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ 是线性组合, 所以 $X(t)$ 也是高斯过程, $X(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-a_1-a_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

由本题可得结论: 两个相互独立的平稳高斯随机过程, 其线性组合的随机过程性质不变, 其一维概率密度函数也服从高斯分布, 均值 $a = a_1 + a_2$, 方差 $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 。

例 3.8 窄带高斯噪声 $n_i(t) = n_c(t) \cos\omega_0 t - n_s(t) \sin\omega_0 t$, 设 $n_i(t)$ 的功率谱密度为 $P_n(\omega)$, 试求:

(1) 同相分量 $n_c(t)$ 的功率谱密度 $P_c(\omega)$;

(2) 正交分量 $n_s(t)$ 的功率谱密度 $P_s(\omega)$ 。

思路: 将 $n_c(t)$ 和 $n_s(t)$ 分离出来后求解。

解: (1) 将 $n_i(t) = n_c(t) \cos\omega_0 t - n_s(t) \sin\omega_0 t$ 等式两边同乘以 $\cos\omega_0 t$ 得

$$\begin{aligned} n_i(t) \cos\omega_0 t &= n_c(t) \cos^2 \omega_0 t - n_s(t) \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t \\ n_i(t) \cos\omega_0 t &= \frac{1}{2} n_c(t) + \frac{1}{2} n_c(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} n_s(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

将以上信号经传输函数为

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (W/2 \text{ 为截止频率, 低于 } 2\omega_0) \text{ 的理想低通滤波器滤}$$

去掉 $2\omega_0$ 频率成分后, 得

$$n_i(t) \cos\omega_0 t \Big|_{\text{LPF}} = \frac{1}{2} n_c(t)$$

对上式两边求功率谱密度得

$$\frac{1}{4} [P_n(\omega + \omega_0) + P_n(\omega - \omega_0)] \cdot |H(\omega)|^2 = \frac{1}{4} P_c(\omega)$$

所以
$$P_c(\omega) = \begin{cases} P_n(\omega + \omega_0) + P_n(\omega - \omega_0) & |\omega| < W/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 将 $n_i(t) = n_c(t) \cos\omega_0 t - n_s(t) \sin\omega_0 t$ 等式两边同乘以 $-\sin\omega_0 t$, 然后用以上相同的方法, 得

$$P_s(\omega) = \begin{cases} P_n(\omega + \omega_0) + P_n(\omega - \omega_0) & |\omega| < W/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

结论: 同相分量 $n_c(t)$ 和正交分量 $n_s(t)$ 的功率谱密度相同, 为

$$P_s(\omega) = P_c(\omega) = \begin{cases} P_n(\omega + \omega_0) + P_n(\omega - \omega_0) & |\omega| < W/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$





3.3 习题解答

3-1 设某微波中继线路由 5 个站组成,每个站故障率为 P ,求该线路正常工作的概率及故障概率。

解:每个站的正常工作概率为 $1-P$,则 5 个站均正常工作即线路正常工作的概率为 $(1-P)^5$,线路故障概率为 $1-(1-P)^5$ 。

3-2 设随机过程为

$$X(t) = At + B$$

① 若 B 为常数, A 在 -1 和 $+1$ 之间均匀分布,画出一些样本函数;

② 若 A 为常数, B 在 0 和 2 之间均匀分布,画出一些样本函数。

解:① 样本函数是通过 $(0, B)$ 点、均匀分布在图 3.5 中由直线 $x(t) = t + B$ 和 $x(t) = B$ 确定的区域 I 以及由直线 $x(t) = -t + B$ 和 $x(t) = B$ 确定的区域 II 中的直线簇。

② 样本函数是斜率均为 A 、均匀分布在图 3.6 中由直线 $x(t) = At$ 和 $x(t) = At + 2$ 确定的区域 I 内的平行直线簇。

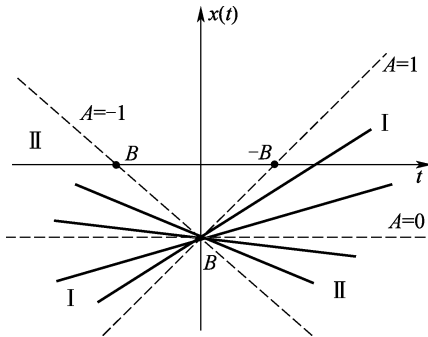


图 3.5 习题 3-2 图 1

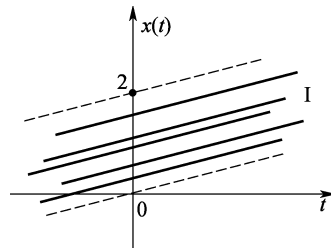


图 3.6 习题 3-2 图 2

3-3 给定随机过程 $X(t)$,定义另一个随机过程 $Y(t)$ 为

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & X(t) \leq x \\ 0 & X(t) > x \end{cases}$$

式中, x 是任一实数。

试证明: $Y(t)$ 的均值和自相关函数分别为随机过程 $X(t)$ 的一维和二维分布函数。

证明:由定义可得 $Y(t)$ 均值为

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= P\{X(t) \leq x\} \times 1 + P\{X(t) > x\} \times 0 \\ &= P\{X(t) \leq x\} \end{aligned}$$

恰为 $X(t)$ 的一维分布函数。

由 $Y(t)$ 的分布,可以得到

$$Y(t_1) = \begin{cases} 1 & X(t_1) \leq x_1 \\ 0 & X(t_1) > x_1 \end{cases}$$

$$Y(t_2) = \begin{cases} 1 & X(t_2) \leq x_2 \\ 0 & X(t_2) > x_2 \end{cases}$$

因此

$$Y(t_1)Y(t_2) = \begin{cases} 1 & X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

故由定义可得 $Y(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} E[Y(t_1)Y(t_2)] &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \times 1 + P(\text{其他}) \times 0 \\ &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \end{aligned}$$

恰为 $X(t)$ 的二维分布函数。

得证。

3-4 给定一随机过程 $X(t)$ 和常数 a , 试以 $X(t)$ 的自相关函数表示随机过程 $Y(t) = X(t+a) - X(t)$ 的自相关函数。

解:

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= E[(X(t+a) - X(t))(X(t+a+\tau) - X(t+\tau))] \\ &= E[X(t+a)X(t+a+\tau) - X(t+a)X(t+\tau) - \\ &\quad X(t)X(t+a+\tau) + X(t)X(t+\tau)] \\ &= R_X(t+a, t+a+\tau) - R_X(t+a, t+\tau) - R_X(t, t+a+\tau) + R_X(t, t+\tau) \end{aligned}$$

3-5 给定随机过程 $X(t)$ 为: $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, 式中, ω 为常数, A, B 是两个独立的正态随机变量, 而且 $E[A] = E[B] = 0, E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$, 试求 $X(t)$ 的均值和自相关函数。

解: $X(t)$ 均值为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[A\cos\omega t + B\sin\omega t] \\ &= E[A]\cos\omega t + E[B]\sin\omega t \\ &= 0 \end{aligned}$$

自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= E[(A\cos\omega t + B\sin\omega t)(A\cos\omega(t+\tau) + B\sin\omega(t+\tau))] \\ &= E[A^2]\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + E[B^2]\sin\omega t\sin\omega(t+\tau) + \\ &\quad E[AB][\cos\omega t\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega t\cos\omega(t+\tau)] \\ &= E[A^2]\cos\omega t\cos\omega(t+\tau) + E[B^2]\sin\omega t\sin\omega(t+\tau) + \\ &\quad E[A]E[B][\cos\omega t\sin\omega(t+\tau) + \sin\omega t\cos\omega(t+\tau)] \\ &= \sigma^2 \cos\omega\tau \end{aligned}$$

3-6 平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度如图 3.7 所示。试求:

- ① $X(t)$ 的自相关函数, 并画出其图形;
- ② $X(t)$ 中含有的直流功率;
- ③ $X(t)$ 中含有的交流功率;
- ④ 对 $X(t)$ 进行抽样, 若要求抽样值不相关, 最高抽样率为多少? 这些抽样值是否统计





独立?

解: ① 根据维纳 - 欣钦定理, 可以得到

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= \frac{1 - \cos 2\pi f_m \tau}{2\pi^2 \tau^2 f_m} = f_m \text{Sa}^2(\pi f_m \tau)$$

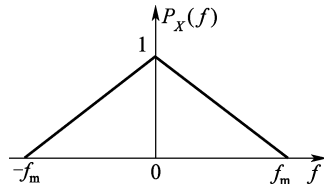


图 3.7 习题 3-6 图

② 直流功率为 $R_X(\infty) = 0$ 。

③ 交流功率为 $R_X(0) - R_X(\infty) = f_m$ 。

④ 若要抽样间隔为 τ 的抽样值之间不相关, 则应有

$$R_X(\tau) = \frac{1 - \cos 2\pi f_m \tau}{2\pi^2 \tau^2 f_m} = 0$$

此时, 最小抽样间隔为

$$\tau_{\min} = \frac{1}{f_m}$$

所以最高抽样速率为 f_m 。

这些抽样值是否独立取决于随机过程 $X(t)$ 的分布。若 $X(t)$ 服从高斯分布, 那么任意间隔 τ 的抽样值均是高斯变量。当这些抽样值之间互不相关时, 也是统计独立的。

3-7 设随机变量 z 服从均匀分布, 其概率密度函数为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq z \leq 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

现按下列关系构造两个新的随机变量 X 和 Y

$$X = \sin z, Y = \cos z$$

- ① 试分别写出 X 和 Y 的概率密度函数;
- ② 试证明 X 和 Y 是两个互不相关的随机变量;
- ③ 试问 X 和 Y 是否统计独立?

解: ①

$$F_X(x) = P(X < x) = P(\sin z < x)$$

$$= \begin{cases} P(0 \leq z \leq \arcsin x \text{ 或 } \pi - \arcsin x \leq z \leq 2\pi) & 0 \leq x \leq 1 \\ P(\pi - \sin^{-1} x \leq z \leq 2\pi + \sin^{-1} x) & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P(0 \leq z \leq \arcsin x) + P(\pi - \arcsin x \leq z \leq 2\pi) & 0 \leq x \leq 1 \\ P(\pi - \arcsin x \leq z \leq 2\pi + \arcsin x) & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\arcsin x} \frac{1}{2\pi} dz + \int_{\pi - \arcsin x}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} dz & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{\pi - \arcsin x}^{2\pi + \arcsin x} \frac{1}{2\pi} dz & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\pi + 2\arcsin x) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$$

所以

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < -1 \text{ 或 } x > 1 \end{cases}$$

同样方法,可得

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\cos z \leq y) \\ &= \begin{cases} P(\arccos y \leq z \leq 2\pi - \arccos y) & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & y > 1 \text{ 或 } y < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{\arccos y}^{2\pi - \arccos y} \frac{1}{2\pi} dz & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & y > 1 \text{ 或 } y < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(2\pi - 2\arccos y) & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & y > 1 \text{ 或 } y < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & y < -1 \text{ 或 } y > 1 \end{cases}$$

② 由互相关的定义,可以得到

$$\begin{aligned} B_{XY} &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[\sin z \cos z] - E[\sin z]E[\cos z] \\ &= \int_0^{2\pi} \sin z \cos z \frac{1}{2\pi} dz - \int_0^{2\pi} \sin z \frac{1}{2\pi} dz \int_0^{2\pi} \cos z \frac{1}{2\pi} dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

故 X 和 Y 互不相关。

③ 由于

$$X^2 + Y^2 = 1$$

故由 Z 的概率密度函数可以得到 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x^2 + y^2 = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 故 X 和 Y 不是相互统计独立的。

3-8 随机过程 $X(t)$ 由下式定义: $X(t) = \sin(2\pi Ft)$, 式中 F 为一随机变量, 其概率密度函数为

$$f(F) = \begin{cases} \frac{1}{B} & 0 \leq F \leq B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$





第三章 随机信号和噪声分析

试问随机过程 $X(t)$ 是否是平稳的。

解: $X(t)$ 的均值为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[\sin 2\pi Ft] \\ &= \frac{1 - \cos 2\pi Bt}{2\pi Bt} \end{aligned}$$

由上式可看出 $E[X(t)]$ 是 t 的函数。

$X(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= \frac{1}{2B} \left[\frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi\tau} - \frac{\sin[2\pi B(2t+\tau)]}{2\pi(2t+\tau)} \right] \end{aligned}$$

由上式可看出自相关函数是 t 和 τ 的函数。故可判断 $X(t)$ 是非平稳的随机过程。

3-9 设随机过程为

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

式中 A 和 ω_0 是常数, θ 是随机变量。令

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

① 计算 $X(t)$ 的统计平均值 $E[X(t)]$ 。由此对该过程的平稳性有什么结论?

② 分别计算该过程的时间均方值 $\overline{X^2(t)}$ 和统计均方值 $E[X^2(t)]$ 。

解: ① 随机过程 $X(t)$ 的均值为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot f(\theta) d\theta \\ &= \frac{A}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) d\theta \\ &= -\frac{2A}{\pi} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

$E[X(t)]$ 是与 t 有关的量, 因此随机过程 $X(t)$ 是非平稳的。

② 根据时间均方值的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} \overline{X^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt \\ &= \frac{A^2}{2} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} \frac{\sin 2\omega_0 T}{2\omega_0 T} \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

统计均方值为

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) \cdot f(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{A^2}{2\pi} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

可以看到,尽管该过程是非平稳的,但时间均方值和统计均方值相等。

3-10 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} |\cos\pi\tau + \cos 3\pi\tau|$$

试求 $X(t)$ 的功率谱密度函数 $P_X(\omega)$ 。

解:由傅里叶变换性质有

$$e^{-|\tau|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}, e^{-|\tau|} e^{\pm j\pi\tau} \leftrightarrow \frac{2}{1+(\omega \mp \pi)^2}$$

所以可得到

$$P_X(\omega) = \mathcal{F}[R_X(\tau)] = \frac{4}{1+(\omega+\pi)^2} + \frac{4}{1+(\omega-\pi)^2} + \pi[\delta(\omega+3\pi) + \delta(\omega-3\pi)]$$

3-11 已知平稳随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度函数为

$$P_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20\left[1 - \frac{|\omega|}{10}\right] & |\omega| \leq 10 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试求 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 。

解:令

$$P_1(\omega) = 1 - \frac{|\omega|}{10} \quad |\omega| \leq 10, S_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{10}} & |\omega| \leq 5 \\ 0 & |\omega| > 5 \end{cases}$$

则有

$$P_1(\omega) = S_1(\omega) * S_1(\omega)$$

而

$$S_1(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}} 10\text{Sa}(5\tau)$$

故应用傅里叶变换的频域卷积定理,可得到

$$P_1(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_1(\tau) = 2\pi \times \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10}} 10\text{Sa}(5\tau) \right]^2$$

因此

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_X(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[8\delta(\omega) + 20P_1(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \times 8 + 20R_1(\tau) = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \frac{\sin^2 5\tau}{\tau^2}$$

3-12 令 $r(t) = A_0 \cos\omega_0 t + n(t)$, 式中 A_0 和 ω_0 是常数。假设 $n(t)$ 是广义平稳随机噪声,均值为 0,其自相关函数为 $R_n(\tau)$ 。

- ① 确定 $r(t)$ 的统计均值 $E[r(t)]$;
- ② 确定 $r(t)$ 的自相关函数 $R_r(t, t+\tau)$;
- ③ 判断 $r(t)$ 是否为广义平稳的。

解:① $r(t)$ 统计均值为 $E[r(t)] = A_0 \cos\omega_0 t + E[n(t)] = A_0 \cos\omega_0 t$

② $r(t)$ 的自相关函数为

$$R_r(t, t+\tau) = E\{[A_0 \cos\omega_0 t + n(t)][A_0 \cos\omega_0(t+\tau) + n(t+\tau)]\}$$





第三章 随机信号和噪声分析

$$\begin{aligned}
 &= A_0^2 \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t + \tau) + E[n(t)n(t + \tau)] + E[n(t)] + E[n(t + \tau)] \\
 &= \frac{A_0^2}{2} [\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) + \cos \omega_0 \tau] + R_n(\tau)
 \end{aligned}$$

③ $r(t)$ 的统计均值与 t 有关, 自相关函数与 t, τ 有关, 因此 $r(t)$ 不是广义平稳随机过程。

3-13 假设 $x(t)$ 是各态历经的随机过程, 令 $x(t) = m_x + y(t)$, 其中 $m_x = E[x(t)]$ 是 $x(t)$ 的直流分量, $y(t)$ 是 $x(t)$ 的交流分量。证明:

- ① $R_x(\tau) = m_x^2 + R_y(\tau)$;
- ② $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = m_x^2$;
- ③ 可以从 $R_x(\tau)$ 中确定 $x(t)$ 的直流分量吗?

证明: ① 由于 $x(t)$ 是各态历经的随机过程, 因此它是平稳的, 其自相关函数只与 τ 有关, 可得到

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= E[x(t)x(t + \tau)] \\
 &= E\{[m_x + y(t)][m_x + y(t + \tau)]\} \\
 &= m_x^2 + m_x E[y(t + \tau)] + m_x E[y(t)] + R_y(t, t + \tau)
 \end{aligned}$$

由于 $y(t)$ 是 $x(t)$ 的交流分量, 所以有

$$E[y(t)] = 0$$

因此

$$R_x(\tau) = m_x^2 + R_y(t, t + \tau)$$

上式两边应相等, 故有

$$R_y(t, t + \tau) = R_y(\tau)$$

因此

$$R_x(\tau) = m_x^2 + R_y(\tau)$$

得证。

② 由①中的结论可得到

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = m_x^2 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_y(\tau) = m_x^2 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[y(t)y(t + \tau)]$$

$y(t)$ 和 $y(t + \tau)$ 是随机过程 $y(t)$ 在 $t, t + \tau$ 两个时间点上的两个随机变量, 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时两者在时间上相距无穷远, 可认为互不相关。因此

$$E[y(t)y(t + \tau)] = E[y(t)] \cdot E[y(t + \tau)] = 0$$

由此可以得到

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = m_x^2$$

③ 由 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = m_x^2$ 可以得到 $|m_x| = \sqrt{R_x(\infty)}$ 。

3-14 设随机过程为

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

式中, A 和 ω_0 是常数, θ 是随机变量。令 θ 的概率密度函数为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试确定 $X(t)$ 的功率谱密度(PSD)。

解: $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} A \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) \cdot \frac{1}{\pi} d\theta \\
&= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) + \cos\omega_0 \tau] d\theta \\
&= \frac{A^2}{2} \cos\omega_0 \tau = R_x(\tau)
\end{aligned}$$

功率谱密度为

$$P_x(\omega) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \frac{A^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

3-15 若 $x(t)$ 是周期函数(或者含有周期成分),证明:

- ① $R_x(\tau)$ 是周期函数(或者含有周期成分);
- ② $P_x(f)$ 含有 δ 函数。

证明: ① 若 $x(t)$ 是周期函数,令 $x(t) = x(t + T_0)$, T_0 是周期,则有

$$\begin{aligned}
R_x(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\
&= E[x(t)x(t+\tau+T_0)] \\
&= R_x(\tau+T_0)
\end{aligned}$$

是周期的。

若 $x(t)$ 含有周期成分,可以令 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, $x_1(t)$ 是以 T_0 为周期的平稳随机过程, $x_2(t)$ 为平稳过程,两者平稳相联系,则有

$$\begin{aligned}
R_x(t, t+\tau) &= E\{[x_1(t) + x_2(t)][x_1(t+\tau) + x_2(t+\tau)]\} \\
&= E[x_1(t)x_1(t+\tau) + x_1(t)x_2(t+\tau) + x_1(t+\tau)x_2(t) + x_2(t)x_2(t+\tau)] \\
&= R_1(\tau) + R_{12}(\tau) + R_{21}(\tau) + R_2(\tau)
\end{aligned}$$

由前述证明可知 $R_1(\tau)$ 是周期函数,另外

$$R_{21}(\tau) = E[x_2(t)x_1(t+\tau)] = E[x_2(t)x_1(t+\tau+T_0)] = R_{21}(\tau+T_0)$$

因此 $R_{21}(\tau)$ 也是周期函数。所以, $R_x(\tau)$ 含有周期成分。

得证。

② 对周期函数 $R_x(\tau)$, 其傅里叶变换即 $P_x(f)$ 应具有如下形式

$$P_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \delta[f - nf_0]$$

其中 C_n 是周期函数 $R_x(\tau)$ 的傅里叶级数展开系数。

当 $R_x(\tau)$ 含有周期成分时,其周期成分对应傅里叶变换如上式所示,因此 $P_x(f)$ 也含有 δ 函数。

3-16 设通信系统由等式 $r(t) = s(t) + n(t)$ 描述。

- ① 证明: $R_r(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau)$;
- ② 当 $s(t)$ 和 $n(t)$ 相互独立,且 $n(t)$ 均值为 0 时,简化①的结论。

证明: ① 不失一般性,假设 $s(t)$ 和 $n(t)$ 均为平稳随机过程。由自相关函数的定义,可得到 $r(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned}
R_r(t, t+\tau) &= E[r(t)r(t+\tau)] \\
&= E\{[s(t) + n(t)][s(t+\tau) + n(t+\tau)]\} \\
&= E[s(t)s(t+\tau) + s(t)n(t+\tau) + n(t)s(t+\tau) + n(t)n(t+\tau)]
\end{aligned}$$





第三章 随机信号和噪声分析

$$= R_s(\tau) + R_n(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau)$$

得证。

② 当 $s(t)$ 和 $n(t)$ 相互独立时,可得到

$$R_{sn}(\tau) = E[s(t)n(t+\tau)] = E[s(t)] \cdot E[n(t+\tau)]$$

$$R_{ns}(\tau) = E[n(t)s(t+\tau)] = E[n(t)] \cdot E[s(t+\tau)]$$

而 $n(t)$ 均值为零,即 $E[n(t)] = 0$,所以

$$R_{sn}(\tau) = 0, R_{ns}(\tau) = 0$$

因此

$$R_r(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau)$$

3-17 如图 3.8 所示的 RC 电路系统中,如果输入信号 $x(t)$ 的自相关函数为 $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$,试用时域方法求系统输出信号 $y(t)$ 的自相关函数和均方值。

解:系统的传输函数为

$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}$$

对 $H(j\omega)$ 求傅里叶反变换,得对应的冲激响应为

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t}, t \geq 0 \left[\text{其中 } \alpha = \frac{1}{RC} \right]$$

所以, $y(t)$ 自相关函数为

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\beta|\lambda_2 - \lambda_1 - \tau|} |\alpha^2 e^{-\alpha(\lambda_1 + \lambda_2)}| d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha e^{-\beta|\tau|} - \beta e^{-\alpha|\tau|}] \end{aligned}$$

其均方值为

$$E[y^2(t)] = R_y(0) = \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha + \beta}$$

3-18 如图 3.8 所示的 RC 系统中,若系统输入 $x(t)$ 是功率谱为 $P_x(\omega) = n_0/2$ 的白噪声,试用频域法求系统的输出 $y(t)$ 的自相关函数 $R_y(\tau)$,并计算其自相关时间 τ_k 。

解:系统传输函数为

$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \left[\text{其中 } \alpha = \frac{1}{RC} \right]$$

则有

$$|H(j\omega)|^2 = \left| \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \right|^2 = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$

由主教材中式(3.78)得

$$\begin{aligned} P_y(\omega) &= P_x(\omega) |H(j\omega)|^2 \\ &= \frac{n_0}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \alpha^2} \\ R_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[P_y(\omega)] \\ &= \frac{n_0\alpha}{4} e^{-\alpha|\tau|} \end{aligned}$$

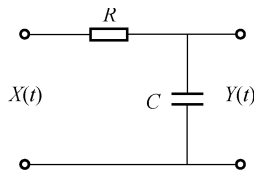


图 3.8 习题 3-17 图

由自相关时间定义式得

$$\tau_k = \frac{P(0)}{2R(0)} = \frac{\frac{n_0}{2}}{2 \times \frac{n_0 \alpha}{4}} = \frac{1}{\alpha}$$

3-19 设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是统计独立且平稳的。

① 试求 $Z(t) = X(t)Y(t)$ 的自相关函数, 并证明 $Z(t)$ 是平稳随机过程;

② 若 $Y(t) = \cos[\omega_0 t + \theta]$, 其中, ω_0 为常数, 相位 θ 是在区间 $[0, 2\pi]$ 内均匀分布的随机变量。试证明 $Z(t)$ 的自相关函数为

$$R_Z(\tau) = \frac{1}{2}R_X(\tau) \cos\omega_0\tau$$

式中, $R_X(\tau)$ 为 $X(t)$ 的自相关函数。

解: ① $Z(t)$ 的均值(数学期望)为

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[X(t)Y(t)] \\ &= E[X(t)] \cdot E[Y(t)] \\ &= m_X m_Y \end{aligned}$$

与时间 t 无关。

$Z(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] \\ &= E[X(t)Y(t)X(t+\tau)Y(t+\tau)] \\ &= E[X(t)X(t+\tau)] \cdot E[Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= R_X(\tau)R_Y(\tau) \end{aligned}$$

只与时间间隔有关。

综上所述, $Z(t)$ 是平稳随机过程。

② $Y(t)$ 的自相关函数为

$$R_Y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = \frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$$

因此 $Z(t)$ 的自相关函数为

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau)R_Y(\tau) = \frac{1}{2}R_X(\tau) \cos\omega_0\tau$$

得证。

3-20 证明若两随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是相互独立的, 则它们是互不相关的, 即 $R_{xy}(\tau) = m_x m_y$ 。

解: 根据互相关函数的定义, $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数为

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)]$$

欲证明两随机过程互不相关, 只需证明两过程的互协方差函数为 0。 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互协方差函数为

$$\begin{aligned} B_{xy}(t, t+\tau) &= E\{[x(t) - E(x(t))][y(t+\tau) - E(y(t+\tau))]\} \\ &= E[x(t)y(t+\tau)] - E[x(t)]E[y(t+\tau)] \\ &= R_{xy}(t, t+\tau) - E[x(t)]E[y(t+\tau)] \end{aligned}$$





第三章 随机信号和噪声分析

当随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 相互独立时,对任意 t 及 τ ,均有随机变量 $x(t)$ 和 $y(t+\tau)$ 相互独立。根据随机变量“相互统计独立的随机变量的乘积的均值等于各自均值的乘积”的性质,则有

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t)]E[y(t+\tau)] = m_x m_y$$

故 $B_{xy}(t, t+\tau) = R_{xy}(t, t+\tau) - E[x(t)]E[y(t+\tau)] = 0$
得证。

(注: m_x 、 m_y 分别表示随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的数学期望。)

3-21 设两个随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是具有零均值的联合高斯过程。互相关函数为

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t_1)y(t_2)] = 10\sin(2\pi\tau)$$

① 何时随机变量 $x_1 = x(t_1)$ 和 $y_2 = y(t_2)$ 相互独立?

② 证明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是或不是独立随机过程。

解: ① 由于随机过程 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均是高斯过程,所以随机变量 $x_1 = x(t_1)$ 和 $y_2 = y(t_2)$ 均是高斯变量。当两个高斯变量互不相关时,两者也是相互统计独立的。

当 $R_{xy}(\tau) = 10\sin(2\pi\tau) = 0$ 时, x_1 和 y_2 互不相关。这时

$$2\pi\tau = 2\pi(t_2 - t_1) = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$$

即 $\tau = t_2 - t_1 = \frac{k}{2}$, $k = 0, \pm 1, \dots$ 时, x_1 和 y_2 互不相关,也相互独立。

证明: ② 由于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均值都为零,因此其互协方差函数为

$$\begin{aligned} B_{xy}(\tau) &= R_{xy}(\tau) - E[x(t)]E[y(t+\tau)] \\ &= R_{xy}(\tau) = 10\sin(2\pi\tau) \end{aligned}$$

只有在 $\tau = t_2 - t_1 = \frac{k}{2}$, $k = 0, \pm 1, \dots$ 时互协方差函数为零。因此两过程是相关的,故 $x(t)$ 和 $y(t)$ 不是相互统计独立的。
得证。

3-22 如图 3.9 所示的系统中,若 $X(t)$ 为平稳随机过程,试证明系统的输出 $Y(t)$ 的功率谱密度函数 $P_Y(\omega) = 2P_X(\omega)(1 + \cos\omega\tau)$ 。

证明: 系统的传输函数为 $H(\omega) = 1 + e^{-j\omega\tau} = 1 + \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$
其幅频响应的平方为 $|H(\omega)|^2 = (1 + \cos\omega\tau)^2 + \sin^2\omega\tau = 2(1 + \cos\omega\tau)$
所以 $P_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega) = 2P_X(\omega)(1 + \cos\omega\tau)$

3-23 如图 3.10 所示的 RL 系统中,输入 $X(t)$ 是功率谱密度为 $n_0/2$ 的白噪声,试用频域法求系统输出 $Y(t)$ 的自相关函数 $R_Y(\tau)$ 。

解: 系统的传输函数为 $H(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$

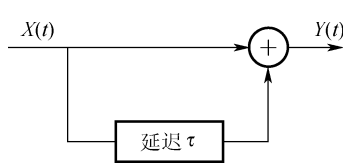


图 3.9 习题 3-22 图

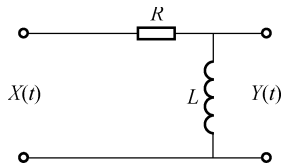


图 3.10 习题 3-23 图

其幅频响应的平方为 $|H(\omega)|^2 = \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2}$

因此,输出过程的功率谱密度为 $P_Y(\omega) = P_X(\omega) |H(\omega)|^2 = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2}$

故 $R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_Y(\omega)] = \frac{n_0}{2} \delta(\tau) - \frac{n_0 R}{4L} e^{-\frac{R}{L} |\tau|}$

3-24 设线性系统的传输函数 $|H(f)|^2$ 如图 3.11 所示。

若输入 $x(t)$ 是高斯随机过程,其功率谱密度为

$$P_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} N_0 & |f| \leq B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

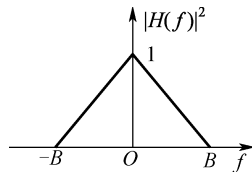


图 3.11 习题 3-24 图

- ① 确定输出 $y(t)$ 的自相关函数;
- ② 确定 $y(t)$ 的概率密度函数;
- ③ 何时两随机变量 $y_1 = y(t_1)$ 和 $y_2 = y(t_2)$ 相互独立?

解: ① $y(t)$ 是高斯随机过程 $x(t)$ 通过线性系统后的输出,因此有

$$P_y(f) = |H(f)|^2 P_x(f) = \frac{N_0}{2} \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$$

其中函数 $\Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$ 的定义请参见习题 2-24。故 $y(t)$ 的自相关函数为

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_y(f)] = \frac{N_0 B}{2} \text{Sa}^2(\pi B \tau)$$

② $y(t)$ 的均值为 $E[y(t)] = E[x(t)] \cdot H(0) = E[x(t)]$

由于 $R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_x(f)] = N_0 B \text{Sa}(2\pi B \tau)$, 故

$$E[x(t)] = \sqrt{R_x(\infty)} = 0$$

所以

$$E[y(t)] = 0$$

$$y(t) \text{ 的方差为 } \sigma_y^2 = R_y(0) - E^2[y(t)] = R_y(0) = \frac{N_0 B}{2}。$$

由于高斯过程 $x(t)$ 通过线性系统后的输出 $y(t)$ 仍然是高斯过程,其均值为零,方差为 $\frac{N_0 B}{2}$, 因此 $y(t)$ 的概率密度函数为

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 B}} \exp\left[-\frac{y^2}{N_0 B}\right]$$

③ 随机变量 y_1, y_2 的均值为

$$E[y_1] = E[y(t_1)] = 0, E[y_2] = E[y(t_2)] = 0$$

由于

$$R_y(\tau) = \frac{N_0 B}{2} \text{Sa}^2(\pi B \tau)$$

当 $\tau = t_2 - t_1 = \frac{k}{B}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 有

$$R_y(\tau) = E[y_1] E[y_2] = 0$$





第三章 随机信号和噪声分析

这表明 y_1 和 y_2 的协方差 $B_y(\tau) = R_y(\tau) - E[y_1]E[y_2] = 0$, 即 y_1 和 y_2 是互不相关的。对于高斯变量, 互不相关意味着相互统计独立。因此, 此时 y_1 和 y_2 相互独立。

3-25 已知线性系统的传输函数(冲激响应)及输入信号的自相关函数(功率谱密度)如下

$$\textcircled{1} \begin{cases} H(f) = \Pi(f/2B) \\ R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \end{cases} \quad B \text{ 和 } N_0 \text{ 为正常数}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} h(t) = A \exp(-\alpha t) u(t) \\ P_x(f) = \frac{B}{1 + (2\pi\beta f)^2} \end{cases} \quad A, B, \beta, \alpha \text{ 为正常数}$$

试求系统输出信号的自相关函数和功率谱密度。

解: ① 由于输入信号的功率谱密度为

$$P_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \frac{N_0}{2}$$

所以输出过程的功率谱密度为

$$P_y(f) = P_x(f) |H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f| \leq B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

对 $P_y(f)$ 求傅里叶反变换, 得到输出信号的自相关函数为

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_y(f)] = N_0 B \text{Sa}(2\pi B\tau)$$

② 对 $h(t)$ 求傅里叶变换, 可得到系统的传输函数为

$$H(f) = \mathcal{F}[Ae^{-\alpha t} u(t)] = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}$$

输出信号的功率谱密度为

$$\begin{aligned} P_y(f) &= |H(f)|^2 P_x(f) \\ &= \frac{A^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \cdot \frac{B}{1 + (2\pi\beta f)^2} \\ &= \frac{A^2 B}{\beta^2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 \beta^2 - 1} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{\beta^2} + (2\pi f)^2} - \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] \\ &= \frac{A^2 B}{\alpha^2 \beta^2 - 1} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{\beta^2} + (2\pi f)^2} - \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] \end{aligned}$$

对 $P_y(f)$ 求傅里叶反变换, 得到输出信号的自相关函数为

$$R_y(\tau) = \frac{A^2 B}{\alpha^2 \beta^2 - 1} \cdot \left[\frac{\beta}{2} e^{-\frac{|\tau|}{\beta}} - \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \right]$$

3-26 如图 3.12 所示的真空二极管, 运用于温度为 27°C 的电路系统环境中, $I_0 = 5 \text{ mA}$, $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ 。设系统的工作带宽为 10 kHz 。试求:

① 由二极管引起的 R_L 上的均方根噪声电压值;

- ② 由电阻性负载引起的 R_L 上的总的均方根噪声电压值;
 ③ 由二极管及电阻性负载共同引起的在 R_L 上的总的均方根噪声电压值。

解:① 二极管引起的是散弹噪声,其电流功率谱密度为

$$P_i(\omega) = I_0 q \text{ W/Hz}$$

噪声功率为

$$\begin{aligned} P &= P_i(\omega) \cdot 2B = 2BI_0q \\ &= 2 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ W} \\ &= 1.6 \times 10^{-17} \text{ W} \end{aligned}$$

$$\text{均方根噪声电流值 } I_n = \sqrt{P} = 4 \times 10^{-9} \text{ A}$$

$$\text{均方根噪声电压值 } U_n = I_n R_L = 4 \times 10^{-5} \text{ V}$$

- ② 电阻性负载引起的是热噪声。环境绝对温度 $T = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$ 。

由主教材中式(3.84),均方根电压值为

$$\begin{aligned} U_n &= 2 \sqrt{kTBR_L} \\ &= 2 \sqrt{1.38 \times 10^{-23} \times 300 \times 10^4 \times 10^4} \text{ V} \\ &\approx 1.29 \times 10^{-6} \text{ V} \end{aligned}$$

- ③ 由二极管及电阻性负载共同引起的在 R_L 上的总电压功率为

$$P_{\text{总}} = P_1 + P_2 = I_0 q R_L^2 2B + 4kTRB$$

$$\text{均方根噪声电压值为 } U_n = \sqrt{P_{\text{总}}} \approx 4.002 \times 10^{-5} \text{ V}。$$

3-27 由一电阻源产生的有效噪声功率为 $P = kTW$,其中 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 是玻耳兹曼常数, T 为热力学温度。请计算在室温时($T = 290 \text{ K}$)由电阻产生的有效功率谱密度(每赫兹的功率)。

解:电阻热噪声的频率范围为 $0 < f < 10^{13} \text{ Hz}$,噪声功率在该范围内近似均匀分布,所以有效噪声功率谱密度为

$$\begin{aligned} P(f) &= \frac{P}{2B} = \frac{kT}{2 \times 10^{13}} \\ &= \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 290}{2 \times 10^{13}} \text{ W/Hz} \\ &= 2 \times 10^{-34} \text{ W/Hz} \end{aligned}$$

3-28 测得某线性系统输出噪声的均方根电压值为 2 mV ,噪声为高斯型起伏噪声,试求噪声电压在 $-4 \sim +4 \text{ mV}$ 之间变化的概率为多少?

解:设噪声均值为 0 。已知均方根电压为 2 mV ,则噪声方差 $\sigma^2 = (\text{均方根电压})^2 = 4(\text{mV})^2$ 由此可得高斯噪声的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{8}\right] \end{aligned}$$

噪声电压在 $-4 \sim +4 \text{ mV}$ 之间变化的概率为

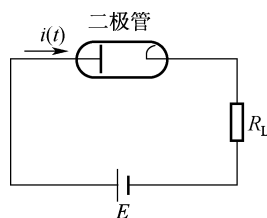


图 3.12 习题 3-26 图





第三章 随机信号和噪声分析

$$\begin{aligned}
 P(-4 \leq x \leq 4) &= \int_{-4}^4 f(x) dx \\
 &= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
 &= 2\Phi(2) - 1 \\
 &= 0.9544
 \end{aligned}$$

3-29 设随机变量 x 是图 3.13 中所示的四种不同器件的输入电压, y 是对应的输出电压。若随机变量 x 具有以下不同的概率密度函数, 试分别求出相应的输出电压 y 的概率密度函数, 并画出图形。

① $f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$;

② $f(x) = e^{-x} \quad x > 0$;

③ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (即 x 为标准正态分布的随机变量)。

解: 若随机变量 x 的函数为 $y = g(x)$, x 的概率密度函数为 $f(x)$, 函数 $y = g(x)$ 可导且是单调函数, 其反函数 $x = h(y)$ 也是单调函数, 则 $y = g(x)$ 的概率密度函数为 $f(y) = f[h(y)] |h'(y)|$, 由此可以解出图 3.13 中(a)、(c)。(b)、(d)中 y 不是 x 的单调函数, 因此可利用概率分布函数与概率密度函数之间的导数关系, 先求出 y 的分布函数(用 x 的分布函数表示), 然后求导得到 y 的概率密度函数。

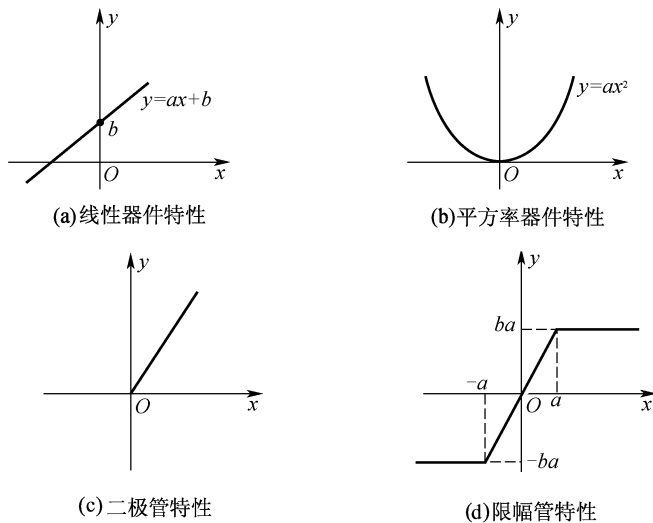


图 3.13 习题 3-29 图

(a) $y = g(x) = ax + b$ (为简化计算, 设 $a > 0$) 是单调函数, $x = h(y) = \frac{y-b}{a}$ 也是单调函数。

① $f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$

则 $f(y) = 1 \cdot \left| \left[\frac{y-b}{a} \right]' \right| \quad 0 < h(y) = \frac{y-b}{a} < 1$

故
$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & b < y < a+b \\ 0 & y \leq b \text{ 或 } y \geq a+b \end{cases}$$

② $f(x) = e^{-x} \quad x > 0$

则
$$f(y) = e^{-\frac{y-b}{a}} \cdot \left| \left[\frac{y-b}{a} \right]' \right| \quad \frac{y-b}{a} > 0$$

故
$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-\frac{y-b}{a}} & y > b \\ 0 & y \leq b \end{cases}$$

③ $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

则
$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{y-b}{a} \right]^2} \cdot \left| \left[\frac{y-b}{a} \right]' \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{y-b}{a} \right]^2}$$

(b) $y = ax^2$ 。

y 的分布函数为

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y < y) \\ &= \begin{cases} P\left[-\sqrt{\frac{y}{a}} < X < \sqrt{\frac{y}{a}}\right] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} P\left[X < \sqrt{\frac{y}{a}}\right] - P\left[X < -\sqrt{\frac{y}{a}}\right] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F\left[\sqrt{\frac{y}{a}}\right] - F\left[-\sqrt{\frac{y}{a}}\right] & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

所以 y 的概率密度函数可表示为

$$\begin{aligned} y > 0 \text{ 时, } f(y) &= \frac{dF(y)}{dy} \\ &= \frac{dF\left[\sqrt{\frac{y}{a}}\right]}{dy} - \frac{dF\left[-\sqrt{\frac{y}{a}}\right]}{dy} \\ &= f\left[\sqrt{\frac{y}{a}}\right] \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{y}{a}\right]^{-\frac{1}{2}} - f\left[-\sqrt{\frac{y}{a}}\right] \cdot \left[-\frac{1}{2} \left[\frac{y}{a}\right]^{-\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

$y \leq 0$ 时, $f(y) = 0$ 。

① $f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{y}} & 0 < y < a \\ 0 & y \leq 0 \text{ 或 } y \geq a \end{cases}$$

② $f(x) = e^{-x} \quad x > 0$





第三章 随机信号和噪声分析

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{y}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{y}{a}}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{y}} \cdot e^{-\frac{y}{2a}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

(c) $y = g(x) = kx, x > 0$ 。

因此, $x = h(y) = \frac{1}{k}y, y > 0$ 。

$h'(y) = \frac{1}{k}$ (为简化计算, 假设 $k > 0$)。

$$\textcircled{1} f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

则

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{k} & 0 < y < k \\ 0 & y \leq 0 \text{ 或 } y \geq k \end{cases}$$

$$\textcircled{2} f(x) = e^{-x} \quad x > 0$$

则

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k}y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

则

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}k} e^{-\frac{y^2}{2k^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

(d) 由图分析可得 y 与 x 的关系为

$$y = \begin{cases} ba & x > a \\ bx & -a \leq x \leq a \\ -ba & x < -a \end{cases}$$

同样由图分析可得到

$$F(y) = P(Y < y) = \begin{cases} P(bX < y) & -ba < y \leq ba \\ P(X \in R) = 1 & y > ba \\ 0 & y \leq -ba \end{cases}$$

所以

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{b} f\left[\frac{y}{b}\right] \quad -ba < y \leq ba$$

$$\textcircled{1} f(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

则

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b} & 0 < y < \min[b, ba] \\ 0 & y \leq 0 \text{ 或 } y \geq \min[b, ba] \end{cases}$$

$$\textcircled{2} f(x) = e^{-x} \quad x > 0$$

则

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-\frac{y}{b}} & 0 < y \leq ba \\ 0 & y \leq 0 \text{ 或 } y > ba \end{cases}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

则

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{y^2}{2b^2}} & -ba < y \leq ba \\ 0 & y \leq -ba \text{ 或 } y > ba \end{cases}$$

3-30 某服从瑞利分布的随机变量的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ 。

① 求随机变量的分布函数 $F(x)$;

② 求概率 $P(x_1 \leq x \leq x_2)$, 这里 $x_2 - x_1 = 1$;

③ 当 x 为何值时, $f(x)$ 有最大值?

④ **证明:** 该瑞利分布的随机变量的均值为 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 。

解: ① 设该随机变量为 X , 根据随机变量分布函数的定义, 可得到

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^x x' e^{-x'^2} dx' & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq x \leq x_2) &= \begin{cases} \int_0^{x_2} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx & x_1 \leq 0 \leq x_2 \\ \int_{x_1}^{x_2} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx & 0 < x_1 < x_2 \\ 0 & x_1 < x_2 \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x_2^2}{2}} & x_1 \leq 0 \leq x_2 = x_1 + 1 \\ e^{-\frac{x_1^2}{2}} - e^{-\frac{x_2^2}{2}} & 0 < x_1 < x_2 = x_1 + 1 \\ 0 & x_1 < x_2 = x_1 + 1 \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x_2^2}{2}} & -1 < x_1 \leq 0 \\ e^{-\frac{x_1^2}{2}} (1 - e^{-(x_1 + \frac{1}{2})}) & x_1 > 0 \\ 0 & x_1 \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$





第三章 随机信号和噪声分析

③ 欲找到 $f(x)$ 的最大值点, 可令 $\frac{df(x)}{dx} = 0$, 得到

$$\frac{d(xe^{-\frac{x^2}{2}})}{dx} = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \quad x \geq 0$$

由上式可得 $x=1$ 时, $f(x)$ 有最大值。

④ 证明

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (-x)(e^{-\frac{x^2}{2}})' dx \\ &= (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-1)e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

根据积分式 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 可得到 $E[x] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 。

得证。

3-31 窄带高斯噪声 $n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_0 t - n_s(t) \sin \omega_0 t$, 已知其功率谱密度函数为 $P(f)$, 试证明 $n_i(t)$ 的同相分量 $n_c(t)$ 与正交分量 $n_s(t)$ 的自相关函数相等, 且为

$$R_{n_c}(\tau) = R_{n_s}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} P(f) \cos[2\pi(f-f_0)\tau] df$$

并思考从上式中得到什么结论。

解: 由主教材中式(3.99)得到

$$\begin{aligned} R_{n_i}(\tau) &= R_{n_c}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{n_c n_s}(\tau) \sin \omega_0 \tau \\ R_{n_i}(\tau) &= R_{n_s}(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{n_s n_c}(\tau) \sin \omega_0 \tau \end{aligned}$$

对上面第一个式子两边乘以 $\cos \omega_0 \tau$, 得到

$$R_{n_i}(\tau) \cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2} R_{n_c}(\tau) + \frac{1}{2} R_{n_c}(\tau) \cos 2\omega_0 \tau - \frac{1}{2} R_{n_c n_s}(\tau) \sin 2\omega_0 \tau$$

即

$$2R_{n_i}(\tau) \cos \omega_0 \tau = R_{n_c}(\tau) + R_{n_c}(\tau) \cos 2\omega_0 \tau - R_{n_c n_s}(\tau) \sin 2\omega_0 \tau$$

由上式可看出, $R_{n_c}(\tau)$ 表示 $2R_{n_i}(\tau) \cos \omega_0 \tau$ 信号中的低频分量, 可通过低通滤波(LPF)得到。即

$$R_{n_c}(\tau) = 2R_{n_i}(\tau) \cos \omega_0 \tau \Big|_{\text{LPF}}$$

对上式求傅里叶变换, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R_{n_c}(\tau)] &= \frac{1}{2\pi} 2P(\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \Big|_{\text{LPF}} \\ &= P(\omega - \omega_0) + P(\omega + \omega_0) \Big|_{\text{LPF}} \\ &= P(f - f_0) + P(f + f_0) \Big|_{\text{LPF}} \end{aligned}$$

式中, $P(f)$ 是窄带过程 $n_i(t)$ 功率谱密度, 如图 3.14 所示。 $P(f - f_0) + P(f + f_0)$ 如图 3.15 所示。

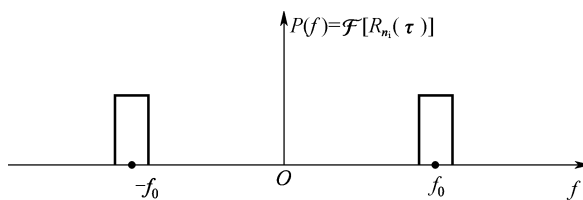


图 3.14 习题 3-31 图 1

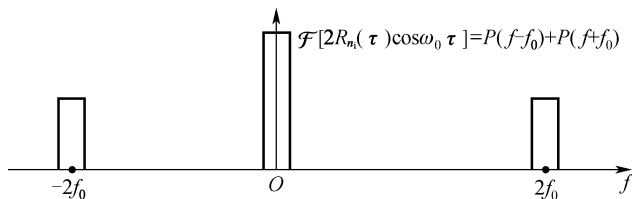


图 3.15 习题 3-31 图 2

定义一个新的功率谱密度函数 $P_0(f)$, 它与 $P(f)$ 的关系是

$$P(f) \Big|_{f>0} = P_0(f-f_0)$$

$P_0(f)$ 如图 3.16 所示。

则有

$$\mathcal{F}[R_{n_c}(\tau)] = P(f-f_0) + P(f+f_0) \Big|_{\text{LPF}} = 2P_0(f)$$

所以

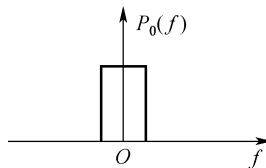


图 3.16 习题 3-31 图 3

$$\begin{aligned} R_{n_c}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[2P_0(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} 2P_0(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2P_0(f) \cos(2\pi f\tau) df + j \int_{-\infty}^{+\infty} 2P_0(f) \sin(2\pi f\tau) df \\ &\quad \text{偶函数} \qquad \qquad \qquad \text{奇函数} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2P_0(f) \cos(2\pi f\tau) df \end{aligned}$$

令 $f=f'-f_0$, 则 $df=df'$, 因此有

$$\begin{aligned} R_{n_c}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2P_0(f'-f_0) \cos[2\pi(f'-f_0)\tau] df' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2P_0(f-f_0) \cos[2\pi(f-f_0)\tau] df \end{aligned}$$

再由 $P(f) \Big|_{f>0} = P_0(f-f_0)$, 可将上式化简为

$$R_{n_c}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} P(f) \cos[2\pi(f-f_0)\tau] df$$

同理可得到正交分量 $n_s(t)$ 的自相关函数也为

$$R_{n_s}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} P(f) \cos[2\pi(f-f_0)\tau] df$$

得证。

3-32 设有一频带受限的高斯白噪声 $n(t)$, 其功率谱密度为 $P_n(f) = 10^{-6} \text{ V}^2/\text{Hz}$, 频率





第三章 随机信号和噪声分析

范围为 $-100 \sim +100 \text{ kHz}$ 。

- ① 试证明该噪声的均方根电压值约为 0.45 V ;
- ② 试求该噪声的自相关函数 $R_n(\tau)$ 。当 τ 取何值时, $n(t)$ 与 $n(t+\tau)$ 是不相关的?
- ③ 试求在任一时刻, $n(t)$ 超过 0.45 V 和 0.9 V 的概率各为多少?
- ④ 写出 $n(t)$ 的二维概率密度函数 $f(n_1, n_2)$, 并与以下两种情况下的一维概率密度函数 $f(n_1)$ 和 $f(n_2)$ 相比较: (a) $\tau = 2.5 \mu\text{s}$; (b) $\tau = 5 \mu\text{s}$ 。

解: ① 电压功率为

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} P_n(f) df = 2 \times 100 \times 10^3 \times 10^{-6} \\ &= 0.2 = R_n(0) = \sigma^2 \text{ (方差)} \end{aligned}$$

故均方根电压值 $= \sqrt{N} = \sqrt{0.2} \text{ V} \approx 0.45 \text{ V}$ 。

②

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} [P_n(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-10^5}^{10^5} 10^{-6} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= 2 \times 10^{-6} \times 10^5 \times \text{Sa}(2\pi \times 10^5 \tau) \\ &= 0.2 \text{Sa}(2\pi \times 10^5 \tau) \end{aligned}$$

当 $\tau = \frac{k}{2 \times 10^5}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $R_n(\tau) = 0$, 此时 $n(t)$ 与 $n(t+\tau)$ 是不相关的。

③

$$\begin{aligned} P\{n(t) > 0.45\} &= \int_{0.45}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{0.45}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.841345 \\ &= 0.158655 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{n(t) > 0.9\} &= \int_{0.9}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{0.9}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 \\ &= 0.02275 \end{aligned}$$

④ $\tau = 2.5 \mu\text{s}$ 时, $R_n(\tau) = 0.2 \text{Sa}(0.5\pi) = \frac{0.4}{\pi}$, 另有 $\rho_{12} = \frac{R_n(\tau)}{\sigma^2} = \frac{R_n(\tau)}{0.2} = \frac{2}{\pi}$, $a_1 = a_2 = 0$ 。

因此, 可写出 $n(t)$ 的二维概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\frac{(n_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho_{12}(n_1 - a_1)(n_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(n_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\left[1-\frac{4}{\pi^2}\right]} \left[\frac{n_1^2}{0.2} - \frac{20n_1n_2}{\pi} + \frac{n_2^2}{0.2} \right]\right\}}{0.4(\pi^2 - 4)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$\tau = 5 \mu\text{s}$ 时, $R_n(\tau) = 0$, n_1 和 n_2 不相关, 因此相互统计独立, 所以

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2) &= f(n_1)f(n_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{0.4\pi} \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{0.4}\right) \end{aligned}$$

3-33 如图 3.17 所示, 余弦波和窄带高斯噪声 $n_i(t)$ 混合加到同步检波器上。设窄带高斯噪声的数学期望为零, 方差为 1。

- ① 写出检波器输出 $\eta(t)$ 的表示式;
- ② 求 $\eta(t)$ 的一维概率密度函数;
- ③ 求 $\eta(t)$ 小于 $\frac{1}{2} V$ 的概率;
- ④ 求 $\eta(t)$ 小于 0 的概率。

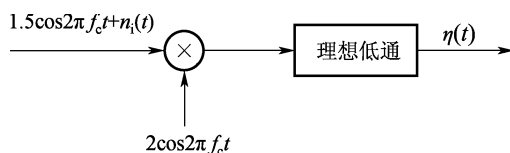


图 3.17 习题 3-33 图

解: ① 余弦波信号通过乘法器后的输出为

$$1.5 \cos 2\pi f_c t \times 2 \cos 2\pi f_c t = \underbrace{1.5}_{\text{低频成分}} + \underbrace{1.5 \cos 4\pi f_c t}_{\text{高频成分}}$$

窄带噪声通过乘法器后的输出为

$$\begin{aligned} n_i(t) 2 \cos 2\pi f_c t &= [n_c(t) \cos 2\pi f_c t - n_s(t) \sin 2\pi f_c t] 2 \cos 2\pi f_c t \\ &= \underbrace{n_c(t)}_{\text{低频成分}} + \underbrace{n_c(t) \cos 4\pi f_c t - n_s(t) \sin 4\pi f_c t}_{\text{高频成分}} \end{aligned}$$

两者均通过理想低通滤波器后, 得到的输出为

$$\eta(t) = 1.5 + n_c(t)$$

② 由于 $n_c(t)$ 是均值为 0, 方差为 1 的高斯过程, 因此 $\eta(t)$ 是均值为 1.5, 方差为 1 的高斯过程。故 $\eta(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1.5)^2}{2}}$$

③

$$\begin{aligned} P\left[\eta(t) < \frac{1}{2}\right] &= F_\eta(0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} f_\eta(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1.5)^2}{2}} dx = \Phi(-1) \\ &= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 \end{aligned}$$





$$= 0.1587$$

④

$$\begin{aligned} P(\eta(t) < 0) &= F_{\eta}(0) = \int_{-\infty}^0 f_{\eta}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1.5)^2}{2}} dx = \Phi(-1.5) \\ &= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

3-34 设理想低通滤波器的输入是功率谱密度为 $P_n(f) = \frac{n_0}{2}$ W/Hz 的白噪声,理想低通滤波器的带宽为 B Hz,传输函数的幅度为 A ,试求:

- ① 低通滤波器输出噪声的自相关函数 $R_{n_0}(\tau)$;
- ② 输出噪声的平均功率,并将结果与 $R_{n_0}(0)$ 相比较。

解: ① 输出噪声的功率谱密度为 $P(f) = P_n(f) \cdot |H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{n_0}{2} A^2 & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$, 因此其自

相关函数为 $R_{n_0}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P(f)] = A^2 B n_0 \text{Sa}(2\pi B\tau)$ 。

② 输出噪声平均功率 $P = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df = A^2 B n_0 = R_{n_0}(0)$ 。

3-35 功率谱密度为 $\frac{n_0}{2}$ 、均值为零的高斯白噪声,通过一个中心频率为 f_0 、带宽为 $2B$ 的理想带通滤波器,求出自相关函数。

解: 输出过程的功率谱密度为

$$P_0(f) = \frac{n_0}{2} \Pi\left[\frac{f-f_0}{2B}\right] + \frac{n_0}{2} \Pi\left[\frac{f+f_0}{2B}\right]$$

$\Pi\left[\frac{f}{2B}\right]$ 的傅里叶反变换为 $2B\text{Sa}(2\pi B\tau)$, 因此输出过程的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_0(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[P_0(f)] \\ &= \frac{n_0}{2} 2B\text{Sa}(2\pi B\tau) 2^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{n_0}{2} 2B\text{Sa}(2\pi B\tau) 2^{-j2\pi f_0 \tau} \\ &= 2n_0 B \cos(2\pi f_0 \tau) \text{Sa}(2\pi B\tau) \end{aligned}$$

3-36 设噪声 $n(t)$ 的功率谱 $P_n(f)$ 如图 3.18 所示。

- ① 试求 $n(t)$ 的自相关函数,并画出波形;
- ② 试求 $n(t)$ 的均方值(功率);
- ③ 若把 $n(t)$ 写成窄带噪声形式 $n(t) = x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t$, 试分别求出 $P_x(f)$ 、 $P_y(f)$ 、 $E[x^2]$ 和 $E[y^2]$ 。

解: ①

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[P_n(f)]$$

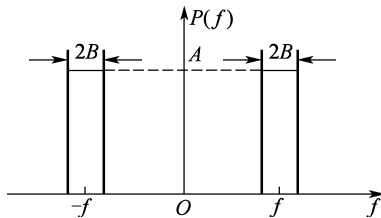


图 3.18 习题 3-36 图 1

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F}^{-1} \left[A\Pi \left[\frac{f-f_0}{2B} \right] + A\Pi \left[\frac{f+f_0}{2B} \right] \right] \\
&= 2ABSa(2\pi B\tau) e^{j2\pi f_0\tau} + 2ABSa(2\pi B\tau) e^{-j2\pi f_0\tau} \\
&= 4AB\cos 2\pi f_0\tau Sa(2\pi B\tau) \\
&= 4AB\cos \omega_0\tau Sa(2\pi B\tau)
\end{aligned}$$

$R_n(\tau)$ 如图 3.19 所示。

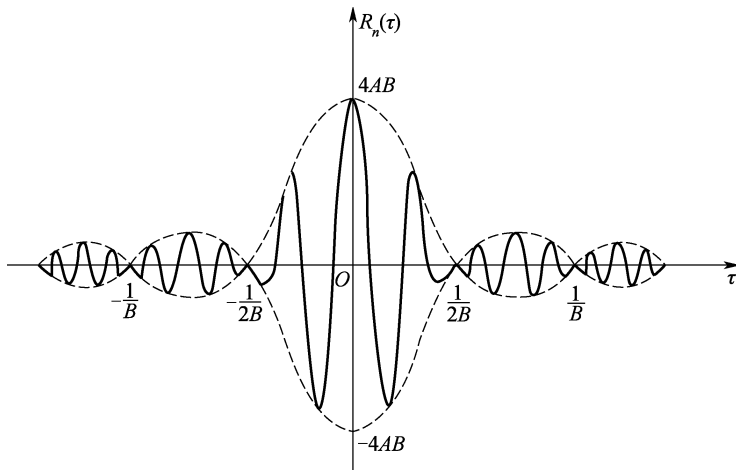


图 3.19 习题 3-36 图 2

② $n(t)$ 的均方值(功率)为 $E[n^2(t)] = R_n(0) = 4AB$ 。

③ 由 $n(t) = x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t$, 可得

$$R_n(\tau) = R_x(\tau)\cos\omega_0\tau - R_{xy}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$$R_n(\tau) = R_y(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{yx}(\tau)\sin\omega_0\tau$$

$x(t)$ 、 $y(t)$ 是 $n(t)$ 的同相分量和正交分量, 根据习题 3-31 中的推导, 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[R_x(\tau)] &= \mathcal{F}[R_y(\tau)] = P(f-f_0) + P(f+f_0) \Big|_{\text{LPF}} \\
&= \begin{cases} 2A & -B \leq f \leq B \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}$$

所以

$$E[x^2(t)] = E[y^2(t)] = R_x(0) = R_y(0) = 4AB$$

