第三章　动量守恒定律和能量守恒定律

一、教学基本要求

1. 掌握功的概念及变力做功的计算方法.
2. 掌握质点的动能定理、动量定理,并能灵活运用解决力学问题.
3. 理解保守力做功的特点及势能的概念.
4. 掌握动量守恒定律、功能原理,机械能守恒定律的适用条件及解题思路和方法.
5. 了解完全非弹性碰撞和完全弹性碰撞的特点.
6. 了解质心概念和质心运动定律.

二、基本概念及基本规律

1. 动量、冲量、动量定理、动量守恒定律

动量　量度物体机械运动的物理量.动量是矢量、状态量.定义式如下:

质点的动量为
$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$$

质点系的动量为
$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i$$

力的冲量　表征力在时间过程中累积效应的物理量称为冲量.冲量是矢量、过程量.定义式为
$$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

质点的动量定理　质点所受合外力的冲量等于质点动量的增量.表达式为
$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1$$

质点系的动量定理　系统所受合外力的冲量等于系统动量的增量.表达式为
$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_{i0}$$
式中 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}}$ 表示系统所受的合外力.

说明:

(1) 质点(或质点系)的动量定理是矢量式,计算时要把它投影为标量式.在直角坐标系中,其分量式为
$$\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=mv_{2x}-mv_{1x}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=mv_{2y}-mv_{1y}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=mv_{2z}-mv_{1z}$$

（2）冲量的方向是动量增量的方向.

（3）系统的内力只能改变系统内个别物体的动量,而不能改变整个系统的动量.

（4）对变力或恒力均适用,在碰撞、打击问题中经常用到.

（5）对于在无限小的时间间隔内,质点系的动量定理可写成

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

或

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

质点系的动量守恒定律　当系统所受合外力为零时,即 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}}=0$ 时,系统的总动量保持不变.可表示为

$$\text{若 } \boldsymbol{F}^{\mathrm{ex}}=0,\text{则 } \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i=\text{常矢量}$$

说明：

（1）动量守恒定律是矢量式,计算时,要把它投影为标量式.

（2）使用条件:系统所受合外力为零,系统动量守恒;系统所受合外力不为零,但合外力在某一方向上的投影为零,则在这个方向上动量守恒;外力≪内力,也可认为系统的动量守恒.

（3）定律中各速度都是相对于同一惯性参考系而言的.

（4）动量守恒定律是物理学最普遍、最基本的定律之一,对宏观物体及微观粒子均适用.

2. 功、动能、动能定理

功　表征力在空间累积效应的物理量称为功.功是能量转化的一种方式,功是过程量,是标量.定义式为

$$W=\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_A^B F\,|\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|\,\cos\theta=\int_A^B F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

功率　功随时间的变化率称为功率.定义式为

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=Fv\cos\theta$$

动能　是描述质点运动状态的单值函数.定义式为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2$$

质点的动能定理　合外力对质点所做的功,等于质点动能的增量.表达式为

$$W=E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}$$

3. 保守力、非保守力、势能

保守力　做功只与物体的始末位置有关,而与路径无关,具有这种特性的力称为保守力.

例如万有引力、重力、弹性力等.物体沿任意闭合路径运动一周时,保守力对它所做的功等于零,可表述为

$$W=\oint_l\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

非保守力　做功与路径有关的力叫做非保守力.如磁力、摩擦力等.

势能　把与物体位置有关的能量称为物体的势能,用符号 E_{p} 表示.

说明：

(1) 势能是状态的函数.

(2) 势能值与零势能位置的选取有关;但势能差与零势能位置的选取无关.

(3) 势能是属于系统的.

(4) 保守力做功等于势能增量的负值,即

$$W_{c}^{in}=-\Delta E_{p}=-(E_{p2}-E_{p1})$$

(5) 力学中常见的三种势能:

重力势能 $E_{p}=mgy$ (可以任选零重力势能位置).

引力势能 $E_{p}=-G\dfrac{m'm}{r}$ (常选取无限远处为零引力势能位置).

弹性势能 $E_{p}=\dfrac{1}{2}kx^{2}$ (常选取弹簧处于自然状态时为零弹性势能位置).

4. 功能原理、机械能守恒定律

质点系的功能原理 外力与非保守内力所做的功等于质点系机械能的增量.表达式为

$$W^{ex}+W_{nc}^{in}=E-E_{0}$$

式中 $E=E_{k}+E_{p}$,称为系统的机械能.

功和能是两个不同的概念,功是物体能量变化的一种量度,功是过程量,能量是状态量.

质点系的机械能守恒定律 当作用于质点系的外力和非保守内力不做功,或它们做的总功为零时,系统内各质点之间的动能和势能可以相互转化,但总机械能保持不变.可表述为

当 $W^{ex}+W_{nc}^{in}=0$ 时,$E=E_{0}=$常量

或

$$\Delta E_{k}=-\Delta E_{p}$$

5. 碰撞

根据两物体碰撞前后总动能是否变化,可将碰撞现象分为三类.

完全弹性碰撞:碰撞前后两物体的总动能守恒.

非弹性碰撞:碰撞后两物体的总动能小于碰撞前两物体的总功能.

完全非弹性碰撞:碰撞后两物体合为一体,以同一速度运动,因而两物体总动能的损失最大.

***6. 质心、质心运动定律**

***n* 个质点组成的质点系其质心位矢**

$$\boldsymbol{r}_{C}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_{i}\boldsymbol{r}_{i}}{m'}$$

式中 m'为质点系内各质点的质量总和,$\boldsymbol{r}_{i}$ 为第 i 个质点对原点 O 的位矢,$\boldsymbol{r}_{C}$ 为质心对原点 O 的位矢.

质量连续分布的物体其质心位矢

$$\boldsymbol{r}_{C}=\frac{\int\boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{m'}$$

质心运动定律 作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以系统质心的加速度,其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}^{ex}=m'\boldsymbol{a}_{C}$$

三、典型例题指导

例 3-1

高空作业时系安全带是非常必要的，假如一质量为 51.0 kg 的人，在操作时不慎从高空竖直跌落下来，由于安全带的保护，最终使他被悬挂起来．已知此时人离原处的距离为 2.0 m，安全带弹性缓冲作用时间为 0.50 s，求安全带对人的平均冲力．

解 1　以人为研究对象，受力可分为两个阶段，第一阶段是作自由落体运动，人跌至 2 m 处时的速度为

$$v_1=\sqrt{2gh} \tag{1}$$

第二阶段是在安全带保护的缓冲过程中，人受竖直向下的重力和安全带给人竖直向上的平均冲力的作用，其合力是一变力，且作用时间很短．取竖直向上为正方向，根据质点的动量定理，有

$$(\overline{F}-mg)\Delta t=0-(-mv_1) \tag{2}$$

于是有　$\overline{F}=mg+\dfrac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t}=1.14\times10^3\ \mathrm{N}$

解 2　从整个过程来讨论．若人体下落 h 高度所用时间为 $\Delta t'=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，则在全过程中重力的作用时间为 $(\Delta t'+\Delta t)$，冲力的作用时间为 Δt，全过程的初、末速度均为零．根据动量定理有

$$-mg(\Delta t'+\Delta t)+\overline{F}\Delta t=0$$

$$\overline{F}=\frac{mg}{\Delta t}\sqrt{\frac{2h}{g}}+mg=1.14\times10^3\ \mathrm{N}$$

例 3-2

质量为 m' 的人手里拿着一个质量为 m 的物体，此人以与水平面成 α 角的速度 v_0 向前跳去．当他达到最高点时，他将物体以相对于人为 u 的水平速度向后抛出．问：由于人抛出物体，他跳跃的距离增加了多少？（假设人可视为质点．）

解　人跳跃距离的增加是由于他在最高点处向后抛出物体所致．在抛物的过程中，人与物之间相互作用力的冲量，使他们各自的动量发生了变化．

把人与物视为一系统，选如图所示坐标系，当人跳跃到最高点处，在向左抛物前后，因水平方向不受外力作用，系统在该方向上动量守恒，故有

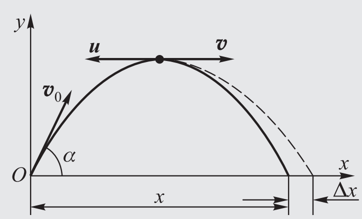
$$(m'+m)v_0\cos\alpha=m'v+m(v-u)$$

式中 v 为人抛物后相对地面的水平速率，$v-u$ 为抛出物对地面的水平速率，得

$$v=v_0\cos\alpha+\frac{m}{m'+m}u$$

人的水平速率的增量为

$$\Delta v=v-v_0\cos\alpha=\frac{m}{m'+m}u$$



例 3-2 图

而人从最高点到地面的运动时间为

$$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

所以，人跳跃后增加的距离为

$$\Delta x=\Delta vt=\frac{mv_0\sin\alpha}{(m'+m)g}u$$

例 3-3

一物体在介质中按规律 $x=ct^2$ 作直线运动,c 为一常量.设介质对物体的阻力正比于速度的平方.试求物体由 $x_0=0$ 运动到 $x=l$ 时,阻力所做的功(已知阻力系数为 k).

解 本题是一个变力做功问题,仍需按功的定义 $W=\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 来求解,关键在于寻找力函数 $F=F(x)$.由运动方程 $x=ct^2$ 可得物体的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2ct$$

物体所受阻力的大小为

$$F=kv^2=4kc^2t^2=4kcx$$

则阻力做的功为

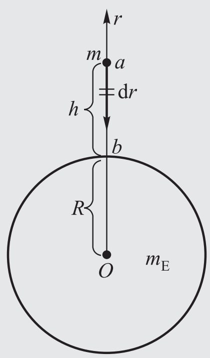
$$W=\int_0^l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_0^l F\cos 180^\circ \mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^l 4kcx\mathrm{d}x=-2kcl^2$$

例 3-4

远离地面 h 高处的某物体质量为 m,由静止开始向地心方向落到地面.试求地球加给落体的万有引力对落体做的功.

解 取落体为研究对象,视为质点.落体只受到地球给它的万有引力的大小 $F=G\frac{mm_\mathrm{E}}{r^2}$,方向指向地心.由于落体在运动过程中,它与地心之间的距离 r 是变化的,所以万有引力是一个变力,从而它做的功是变力做功问题.



例 3-4 图

取地心为坐标原点,从地心 O 指向落体为 r 轴正方向,如图所示.在每一小段位移 $\mathrm{d}r$ 内,万有引力的方向与规定的正方向相反,应取负值.落体由 a 点落到 b 点,万有引力对落体做的功等于

$$W=\int_a^b -G\frac{mm_\mathrm{E}}{r^2}\mathrm{d}r=-Gmm_\mathrm{E}\int_{R+h}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$=Gmm_\mathrm{E}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

由于 $R<R+h$,所以 W 得正值,即万有引力对落体做正功.

例 3-5

一人从 10.0 m 深的井中提水,起始桶中装有 10.0 kg 的水,由于水桶漏水,每升高 1.0 m 要漏去 0.2 kg 的水,水桶被匀速地从井中提到井口,求人所做的功.

解 水桶在匀速上提过程中,$\boldsymbol{a}=0$,拉力与水桶重力平衡,有

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{P}=0$$

水桶重力因漏水而随提升高度而变化,取竖直向上为坐标轴正向,上式投影为

$$F-P=F-(mg-\alpha gy)=0$$

即

$$F=mg-\alpha gy$$

其中 $\alpha=0.2\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}}$,拉力是变力,所以人对水桶的拉力做功为变力做功,

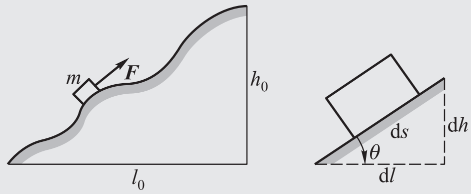
$$W=\int_0^{10}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{y}=\int_0^{10}(mg-\alpha gy)\mathrm{d}y$$

$$=\left(mgy-\frac{1}{2}\alpha gy\right)\Big|_0^{10}$$

$$=10\times 9.8\times 10\ \mathrm{J}-\frac{1}{2}\times 0.2\times 9.8\times 10^2\ \mathrm{J}=882\ \mathrm{J}$$

例 3-6

用力 $\boldsymbol{F}$ 拉动一质量为 m 的货物缓慢地上一山坡，上坡时每一处 $\boldsymbol{F}$ 的方向均沿山坡的切向（见例 3-6 图），假定山坡高 h_0，从山脚到山顶的水平距离为 l_0，货物与山坡间的摩擦因数为 μ，求将货物拉上山顶时，力 $\boldsymbol{F}$ 做的功.



例 3-6 图

解　货物保持缓慢运动，表明物体始终处于力平衡状态，沿山坡切向，必有

$$F=mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta$$

式中 θ 是山坡在某处的倾角，由于倾角随地点而改变，故 $\boldsymbol{F}$ 是一个随位置变化的力.$\boldsymbol{F}$ 在任一元位移上做的元功应为

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=F\mathrm{d}s=(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)\mathrm{d}s$$
$$=mg\mathrm{d}h+\mu mg\mathrm{d}l$$

将货物从山脚拉上山顶 $\boldsymbol{F}$ 做的总功为

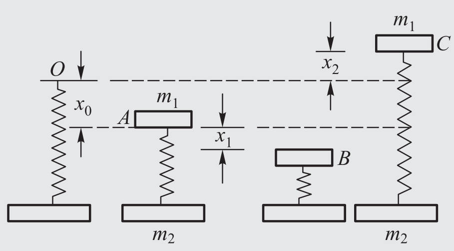
$$W=\int_0^{h_0}mg\mathrm{d}h+\int_0^{l_0}\mu mg\mathrm{d}l=mgh_0+\mu mgl_0$$
$$=mg(h_0+\mu l_0)$$

思考：拉力 $\boldsymbol{F}$ 做功是否与路径有关？为什么？

例 3-7

质量为 m_1 和 m_2 的两块薄板，用一轻质弹簧连接起来，如图所示，弹簧的劲度系数为 k，问至少要用多大的力压在 m_1 上，才能使该力突然撤去后，m_1 板跳起来，m_2 板刚好被提起来？

解　如图所示，开始弹簧处于自然长度状态，当 m_1 板压在弹簧上静止平衡时，弹簧收缩了 x_0，m_1 受两个力，弹性力向上，重力向下，根据平衡条件



例 3-7 图

$$m_1g=kx_0\tag{1}$$

用力 $\boldsymbol{F}$ 向下压 m_1 使弹簧再收缩 x_1，m_1 受三个力，弹性力向上，重力向下，外力 $\boldsymbol{F}$ 向下，根据平衡条件

$$m_1g+F=k(x_0+x_1)\tag{2}$$

撤去外力 $\boldsymbol{F}$ 后，m_1 在竖直方向跳起到最高点 C 时，弹簧对 m_1 的弹性力为 kx_2 方向向下.弹簧对 m_2 的弹性力也为 kx_2，方向向上.m_2 刚好被提起，要求

$$kx_2=m_2g\tag{3}$$

取 m_1、弹簧和地球为研究对象.m_1 从 B 点跳到 C 点的过程中，该系统除受保守力外，只受一个木块 m_2 对弹簧的拉力，但此力不做功，满足机械能守恒定律.

取 B 点为零重力势能位置，O 点为零弹性势能位置.B、C 两点的机械能分别为

$$E_B=0(\text{动能})+0(\text{重力势能})+\frac{1}{2}k(x_0+x_1)^2$$

$$E_C=0(\text{动能})+m_1g(x_0+x_1+x_2)+\frac{1}{2}kx_2^2$$

根据机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}k(x_0+x_1)^2=m_1g(x_0+x_1+x_2)+\frac{1}{2}kx_2^2 \quad (4)$$

由式(1)、(2)、(3)、(4)解得

$$F=m_1g+m_2g$$

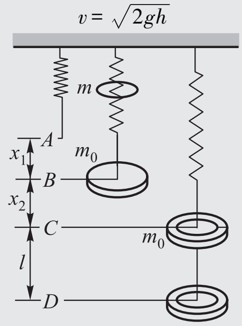
例 3-8

质量为 m_0 的圆盘挂在弹簧下边,如图所示.弹簧的劲度系数为 k,弹簧的质量忽略不计.今有一个质量为 m 的圆环,从离圆盘高 h 处自由落下,并且与圆盘作完全非弹性碰撞,碰撞时间极短,此后,盘与环一起作振动.试求振动的振幅.

解 整个运动可以分为三个物理过程:

第一个物理过程是环 m 作自由落体运动,它与 m_0 碰撞前的速度为

$$v=\sqrt{2gh} \quad (1)$$



例 3-8 图

第二个物理过程是 m 与 m_0 作完全非弹性碰撞.取环 m 与盘 m_0 为研究对象.受外力 $(m+m_0)g$ 向下、弹簧拉力向上作用,由于碰撞时间极短,外力≪内力,满足动量守恒定律

$$mv=(m+m_0)u \quad (2)$$

式中 u 是碰撞后 m 和 m_0 的共同速度.

第三个物理过程是 m 和 m_0 一起作往复运动.取盘(包括其上的环)、弹簧和地球组成的系统为研究对象.除保守内力作用外,只受到天花板施于弹簧上端的一个外力.由于弹簧上端无位移,所以该力不做功,满足 $W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=0$,机械能守恒.

设 A 点为弹簧原长的位置,B 点是环与盘相碰的位置,也是弹簧下端挂盘后的平衡位置,挂盘后,弹簧伸长 x_1 有

$$m_0g=kx_1 \quad (3)$$

C 点为弹簧挂着盘和环的平衡位置,亦即作往复运动的平衡位置,有

$$(m+m_0)g=k(x_1+x_2) \quad (4)$$

D 点为盘与环一起振动达到的最大位置,$CD=l$ 即振幅.

取 A 点为零弹性势能位置,D 点为零重力势能位置,B、D 两点的机械能为

$$E_B=\frac{1}{2}(m+m_0)u^2+(m+m_0)g(l+x_2)+\frac{1}{2}kx_1^2$$

$$E_D=0(\text{动能})+0(\text{势能})+\frac{1}{2}k(x_1+x_2+l)^2$$

根据机械能守恒定律得

$$E_B=E_D$$

即

$$\frac{1}{2}(m+m_0)u^2+(m+m_0)(l+x_2)g+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}k(x_1+x_2+l)^2 \quad (5)$$

由式(1)、(2)、(3)、(4)、(5)解得振幅为

$$l=\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{2m^2gh}{k(m+m_0)}}$$

例 3-9

如图(a)所示,有一自动卸货矿车,满载时质量为 m',从与水平成倾角 $\alpha=30°$ 斜面上的点 A 由静止下滑.设斜面对车的阻力为车重的 0.25 倍,矿车下滑距离 l 时,与缓冲弹簧一道沿斜面运动.当矿车使弹簧产生最大压缩形变时,矿车自动卸货,然后矿车借助弹簧的弹性作用,使之返回原位置 A 再装货.试问要完成这一过程,空载时与满载时车的质量之比应为多大?

解　矿车在下滑和返回的全过程中受到重力、弹力、阻力和支持力作用.若取矿车、地球和弹簧组成的系统为研究对象,支持力不做功,重力、弹力为保守内力,而阻力为外力.矿车在下滑和上行两过程中外力做功,系统机械能不守恒,因此,可应用功能原理去求解.

取沿斜面向上为 x 轴正方向.弹簧被压缩到最大形变时弹簧上端为坐标原点 O,如图(b)所示,并取 O 点处重力势能为零,弹簧原长时弹性势能为零.矿车在下滑和上行的全过程中,按题意,摩擦力所做的功为

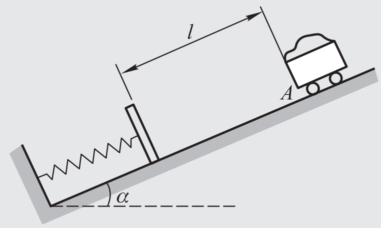
$$W_f=-(0.25mg+0.25m'g)(l+x) \tag{1}$$

式中 m' 和 m 分别为矿车满载和空载时的质量,x 为弹簧最大被压缩量.

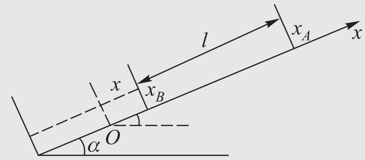
根据功能原理,在矿车运动的全过程中,外力所做的功应等于系统机械能的增量,故有

$$W_f=\Delta E=\Delta E_p+\Delta E_k$$

由于矿车返回原位时速度为零,故 $\Delta E_k=0$;而由于质量变化,重力势能变化,



(a)



(b)

例 3-9 图

$$\Delta E_p=(m-m')g(l+x)\sin\alpha \tag{2}$$

由式(1)=式(2) 得

$$-0.25(m+m')g(l+x)=(m-m')g(l+x)\sin\alpha$$

即

$$\frac{m}{m'}=\frac{1}{3}$$

例 3-10

如图所示,质量为 72 kg 的人跳蹦极.弹性蹦极带长 20 m,劲度系数为 60 N·m^{-1}(忽略空气阻力).(1)此人自跳台跳出后,落下多高时速度最大?此最大速度是多少?(2)已知跳台高于下面水面 60 m.此人跳下后会不会触到水面?

解　(1)此人下落时,当蹦极带对他的向上拉力和他受的重力相等时速度最大.以 l_0 表示蹦极带的原长,以 l 表示伸长的长度,则速度最大时,$mg=kl$,由此得 $l=mg/k$.此人速度最大时已下落的距离为

$$h=l_0+l=l_0+\frac{mg}{k}=20\ \text{m}+\frac{72\times9.8}{60}\ \text{m}=31.8\ \text{m}$$

由机械能守恒定律,以 v_m 表示最大速度,则应有

$$mgh=\frac{1}{2}kl^2+\frac{1}{2}mv_m^2$$

由此得

$$v_m=\sqrt{\frac{mg^2}{k}+2gl_0}$$

$$=\sqrt{\frac{72\times9.8^2}{60}+2\times9.8\times20}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=22.5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2)人降到最下面时,动能为零.由机械能守恒定律,以 l' 表示蹦极带的最大伸长,则有

$$mg(l_0+l')=\frac{1}{2}kl'^2$$

代入 m、l_0、k 的数据,可得一数学方程

$$l'^2-27.4l'-549=0$$

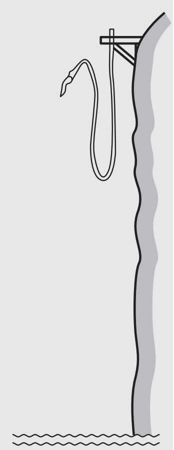
解此方程可得

$$l'=38.1\ \text{m}$$

此时人在跳台下的距离为

$$l_0+l'=20\ \text{m}+38.1\ \text{m}=58.1\ \text{m}<60\ \text{m}$$

所以人不会触及水面.



例 3-10 图