

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
现代机械工程系系列精品教材

有限元基础理论与 ANSYS18.0 应用

张洪信 管殿柱 主编



机械工业出版社

本书是“十三五”国家重点出版物出版规划项目，介绍了有限元法的基础理论与 ANSYS18.0 的应用。全书共分为 7 章：第 1 章对有限元法及 ANSYS 进行了全面概述，以便从总体把握各种要点；第 2 章介绍了有限元法的基础理论及其在结构静力学、结构动力学、结构非线性分析中的应用；第 3 章介绍了 ANSYS 建模与网格划分，对连接板、轴类零件、圆柱齿轮等建模实例的操作进行了具体讲述；第 4 章介绍了结构线性静力分析过程，对连杆受力分析、圆孔应力集中分析等实例的操作进行了具体讲述；第 5 章介绍了动力学分析过程，对机翼模态分析、汽车悬架系统谐响应分析等实例的操作进行了具体讲述；第 6 章介绍了非线性分析过程，对装载时矿石对车厢冲击分析、圆盘塑性变形分析、销与销孔接触分析等实例的操作进行了具体讲述；第 7 章介绍了热分析、流体动力学分析、电磁场分析等过程与实例操作。为了兼顾缺乏弹性力学知识的读者，附录中对有限元法涉及的弹性力学基本知识做了简要介绍。

本书可作为土木、水利、机械等工科专业本科生及研究生的教材，也可以作为工程设计人员的参考书籍。

图书在版编目 (CIP) 数据

有限元基础理论与 ANSYS18.0 应用/张洪信, 管殿柱主编. —北京: 机械工业出版社, 2018. 8

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 现代机械工程系列精品教材
ISBN 978-7-111-60226-2

I. ①有… II. ①张…②管… III. ①有限元分析-应用软件-高等学校-教材 IV. ①O241.82-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 128529 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 商红云 责任编辑: 商红云 刘鑫佳

责任校对: 陈越 封面设计: 张静

责任印制:

印刷厂印刷

2018 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·16.25 印张·441 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-60226-2

定价: 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线: 010-88379833

读者购书热线: 010-88379649

封面无防伪标均为盗版

网络服务

机工官网: www.cmpbook.com

机工官博: weibo.com/cmp1952

教育服务网: www.cmpedu.com

金书网: www.golden-book.com

前 言

本书坚持理论与实践紧密结合的原则，将有限元理论与 ANSYS 操作糅合在一起，以期促进有限元理论与 ANSYS 的学习、应用和普及推广。

有限单元法是当前工程技术领域最常用、最有效的数值方法，已成为现代工程设计技术不可或缺的重要组成部分。ANSYS 软件是集结构、流体、电场、磁场、声场及热传导分析于一体的大型通用有限元分析软件，由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发，它能与多数 CAD 软件（如 Pro/ENGINEER、UG、NASTRAN、I-DEAS、AutoCAD）及机械仿真软件（如 ADAMS）接口，实现数据的共享和交换，是现在产品设计中的高级 CAE 工具之一。

本书是为土木、水利、机械等工科专业本科生、研究生和工程技术人员学习有限元法和 ANSYS 操作而编写的教材。编者集多年从事本科生、研究生教学与科研经验，编写时力求做到深入浅出、概念清晰、思路简明、系统性强。论述以 ANSYS18.0 软件为主，兼顾其他版本。为了能够与其他参考资料相互印证，便于 ANSYS 学习，书中诸多例题以操作过程为主线，有的采用米制单位，有的采用英制单位，尽管 ANSYS 程序中并不特别强调物理量的单位。需要特别指出的是，一个分析过程内英制和米制单位不可混用！

本书依次介绍结构静力学问题、结构动力学问题、结构非线性问题、热分析、流体动力学及电磁场问题分析的有限元方法及 ANSYS 操作步骤。第 1 章对有限元法及 ANSYS 进行了全面概述，以便从总体把握各种要点；第 2 章介绍了有限元法的基础理论及其在结构静力学、结构动力学、结构非线性分析中的应用；第 3 章介绍了 ANSYS 建模与网格划分，对连接板、轴类零件、圆柱齿轮等建模过程实例的操作进行了具体讲述；第 4 章介绍了结构线性静力分析过程，对连杆受力分析、圆孔应力集中分析等实例的操作进行了具体讲述；第 5 章介绍了动力学分析过程，对机翼模态分析、汽车悬架系统谐响应分析等实例的操作进行了具体讲述；第 6 章介绍了非线性分析过程，对装载时矿石对车厢冲击分析、圆盘塑性变形分析、销与销孔接触分析等实例的操作进行了具体讲述；第 7 章介绍了热分析、流体动力学分析、电磁场分析等过程与实例操作；书后附录还提供了弹性力学的基本方程、各领域常用量及其单位换算关系。

本书是集体劳动的成果，由张洪信（青岛大学）、管殿柱（青岛大学）主编，参加编写工作的还有谈世哲、赵清海、姜晓天、李文秋、王献红、宋一兵、管玥、刘慧、刘志刚、张开拓。

由于写作时间较短，加之编者水平有限，不足之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编 者

目 录

前 言

第 1 章 有限元法与 ANSYS 入门 1

- 1.1 发展与现状 1
- 1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤 3
 - 1.2.1 矩阵分析法 3
 - 1.2.2 有限单元法分析的一般步骤 9
- 1.3 ANSYS 的基本操作 10
 - 1.3.1 ANSYS 的安装 10
 - 1.3.2 ANSYS 的启动、用户界面及退出 10
 - 1.3.3 ANSYS 的操作方式 13
 - 1.3.4 ANSYS 的典型分析过程 14
 - 1.3.5 ANSYS 的文件管理及日志文件使用 18
- 1.4 本章小结 19
- 1.5 思考与练习 19

第 2 章 有限单元法基础理论 21

- 2.1 结构静力学问题的有限元法 21
 - 2.1.1 平面问题有限元法 21
 - 2.1.2 轴对称问题有限单元法 29
 - 2.1.3 空间问题有限元法 32
 - 2.1.4 等参数有限元方法 35
 - 2.1.5 单元与整体分析 38
- 2.2 结构动力学问题有限元方法 40
 - 2.2.1 运动方程 41
 - 2.2.2 质量矩阵 41
 - 2.2.3 阻尼矩阵 43
 - 2.2.4 结构自振频率与振型 45
 - 2.2.5 振型叠加法求解结构的受迫振动 46
- 2.3 结构非线性有限单元法 48
 - 2.3.1 塑性力学问题 48
 - 2.3.2 大位移问题 56
- 2.4 本章小结 57
- 2.5 思考与练习 58

第 3 章 ANSYS 的建模 60

- 3.1 建模基础 60

- 3.1.1 模型的生成 60
- 3.1.2 坐标系 60
- 3.1.3 工作平面 63
- 3.1.4 实体模型 65
- 3.1.5 有限元模型 65
- 3.2 建立复杂有限元模型 68
- 3.3 连接板建模实例 70
- 3.4 轴类零件建模实例 75
 - 3.4.1 自底向上建模 75
 - 3.4.2 自顶向下建模 80
- 3.5 圆柱齿轮建模实例 82
- 3.6 本章小结 89
- 3.7 思考与练习 90

第 4 章 结构线性静力分析 91

- 4.1 结构静力分析过程与步骤 91
 - 4.1.1 建立模型 91
 - 4.1.2 施加载荷并求解 91
 - 4.1.3 检查结果 93
- 4.2 连杆受力分析实例 94
- 4.3 圆孔应力集中分析实例 105
- 4.4 本章小结 112
- 4.5 思考与练习 113

第 5 章 动力学分析 115

- 5.1 动力学分析的过程与步骤 115
 - 5.1.1 模态分析 115
 - 5.1.2 谐响应分析 118
 - 5.1.3 瞬态动力学分析 122
- 5.2 机翼模态分析实例 127
- 5.3 汽车悬架系统的谐响应分析 134
- 5.4 本章小结 141
- 5.5 思考与练习 142

第 6 章 非线性分析 143

- 6.1 基本概念 143
- 6.2 非线性分析的过程与步骤 146
 - 6.2.1 建模 146
 - 6.2.2 加载求解 146
 - 6.2.3 查看结果 149
- 6.3 装载时矿石对车厢的冲击非线性分析

实例	151	7.2 流体动力学分析	221
6.4 圆盘塑性变形分析实例	164	7.2.1 FLUENT 分析的概念与基本 步骤	221
6.5 销与销孔接触分析	177	7.2.2 管内流动分析实例	223
6.6 本章小结	187	7.3 电磁场分析	230
6.7 思考与练习	187	7.3.1 电磁场分析的基本步骤与概念	230
第 7 章 其他问题分析	189	7.3.2 2D 静态电磁场分析实例	233
7.1 热分析	189	7.4 DesignXplorer 概述	244
7.1.1 热分析单元	189	7.5 本章小结	248
7.1.2 稳态热分析过程	190	7.6 思考与练习	248
7.1.3 瞬态热分析过程	193	附录	250
7.1.4 耦合分析的过程和步骤	197	附录 A 弹性力学的基本方程	250
7.1.5 冷却栅管的热分析实例	200	附录 B ANSYS 程序中常用的量和单位	252
7.1.6 包含焊缝的金属板热膨胀分析 实例	208	参考文献	254

试读版本仅供防疫期间线上教学使用

第 1 章 有限元法与 ANSYS 入门

CAE 即计算机辅助工程，是指工程设计中的分析计算与仿真。CAE 软件可分为专用软件和通用软件两类，前者主要是针对特定类型的工程或产品用于产品性能分析、预测和优化的软件。它以在某个领域中的应用深入而见长，如美国 ETA 公司的汽车专用 CAE 软件 LS/DYNA3D 及 ETA/FEMB 等。通用软件可对多种类型的工程和产品的物理力学性能进行分析、模拟、预测、评价和优化，以实现产品技术创新。它以覆盖的应用范围广而著称，如 ANSYS、PATRAN、NASTRAN 和 MARC 等。

目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有：有限单元法（Finite Element Method, FEM）、边界元法（Boundary Element Method, BEM）和有限差分法（Finite Difference Method, FDM）等，但就其实用性和应用的广泛性而言，主要还是有限单元法。作为一种离散化的数值解法，有限单元法在结构分析等领域中得到了广泛应用。

【本章重点】

- 有限元法与 ANSYS 的起源和发展。
- 矩阵分析法分析杆件结构的过程与步骤。
- ANSYS 的界面组成及分析问题的步骤。

1.1 发展与现状

离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代。1941 年 A. Hrennikoff 首次提出用离散元素法求解弹性力学问题，当时仅限于用杆系结构来构造离散模型，但能很好地说明有限元思想。如果原结构是杆系，这种方法的解是精确的，发展到现在就是大家熟知的矩阵分析法。究其实质这还不能说就是有限单元法思想，但结合以后的有限元理论，统称为广义有限单元法。1943 年 R. Courant 在求解扭转问题时为了表征翘曲函数而将截面分成若干三角形区域，在各三角形区域设定一个线性的翘曲函数，这实质上就是有限单元法的基本思想（里兹法的推广），这一思想真正用于工程中是在电子计算机出现后。

20 世纪 50 年代因航空工业的需要，美国波音公司的专家首次采用三节点三角形单元，将矩阵位移法用到平面问题上。同时，联邦德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论文，为这一方法的理论基础做出了杰出贡献。1960 年美国的 R. W. Clough 教授在一篇题为《平面应力分析的有限单元法》的论文中首先使用“有限单元法”一词，此后这一名称得到广泛认可。

20 世纪 60 年代有限单元法发展迅速，除力学界外，许多数学家也参与了这一工作。这奠定了有限单元法的理论基础，厘清了有限单元法与变分法之间的关系，发展了各种各样的单元模式，扩大了有限单元法的应用范围。

20 世纪 70 年代以来，有限单元法进一步得到蓬勃发展，其应用范围扩展到所有工程领域，成为连续介质问题数值解法中最活跃的分支。由变分法有限元扩展到加权残数法与能量平衡法有限元，由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定性问题、动

力问题和波动问题，由线性问题扩展到非线性问题，分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，由结构分析扩展到结构优化乃至设计自动化，从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域。它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解。

有限单元法的基本思想是将物体（即连续的求解域）离散成有限个且按一定方式相互联结在一起的单元的组合，来模拟或逼近原来的物体，从而将一个连续的无限自由度问题简化为离散的有限自由度问题求解的一种数值分析法。物体被离散后，通过对其中各个单元进行单元分析，最终得到对整个物体的分析。网格划分中每一个小的块体称为单元，单元之间相互联结的点称为节点。单元上节点处的结构内力为节点力，外力（有集中力、分布力等）为节点载荷。

数值模拟技术通过计算机程序在工程中得到了广泛的应用。到 20 世纪 80 年代初期，国际上较大型的面向工程的有限元通用软件达到几百种，其中著名的有 ANSYS、NASTRAN、ABAQUS、ASKA、ADINA、SAP 与 COSMOS 等，它们的功能越来越完善，不仅包含多种条件下的有限元分析程序，而且带有功能强大的前处理和后处理程序。由于有限元通用程序使用方便、计算精度高，其计算结果已成为各类工业产品设计和性能分析的可靠依据。大型通用有限元分析软件不断吸取计算方法和计算机技术的最新进展，将有限元分析、计算机图形学和优化技术相结合，已成为解决现代工程学问题必不可少的有力工具。

ANSYS 软件是集结构、流体、电磁场、声场和耦合场分析于一体的大型通用有限元分析软件。由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发，它能与多数 CAD 软件接口，实现数据的共享和交换，如 Pro/ENGINEER、UG、I-DEAS、CADDSS 及 AutoCAD 等，是现代产品设计中的高级 CAD 工具之一。

ANSYS 公司成立于 1970 年，总部位于美国宾夕法尼亚州的匹兹堡，致力于 CAE 技术的研发。ANSYS 软件的创始人是美国匹兹堡大学力学系教授、著名有限元权威 John Swanson 博士。如今，ANSYS 软件已经成功地应用于世界工业的各个领域，它广泛应用于结构、热、流体、电池、交通、土木工程、电子、造船等一般工业及科学研究。ANSYS 程序是一个功能强大、应用灵活的设计分析及优化软件包，可以浮动运行于从 PC、工作站到巨型计算机的各种计算机及操作系统。

目前 ANSYS 公司发布了最新的 ANSYS 18.0 版本，在 CAE 功能上引领现代产品研发科技，涉及的内容包括：高级分析、网格划分、优化、多物理场和多体动力学。立足于拥有世界上最多的用户，ANSYS 18.0 不仅为当前的商业应用提供了新技术，而且在以下方面取得了显著进步：

- (1) 继续开发和提供世界一流的求解器技术。
- (2) 提供了针对复杂仿真的多物理场耦合解决方法。
- (3) 整合了 ANSYS 的网格技术并产生统一的网格环境。
- (4) 通过对先进的软硬件平台的支持来实现对大规模问题的高效求解。
- (5) 继续改进最好的 CAE 集成环境——ANSYS Workbench。
- (6) 继续融合先进的计算流体动力学技术。
- (7) 提供了功能更为强大的显式动力学分析模块 ANSYS/LS-DYNA。
- (8) 加速多步求解——ANSYS VT 加速器，基于 ANSYS 变分技术，是通过减少迭代总步数以加速多步分析的数学方法。
- (9) 网格变形和优化。对于很多项目进行优化分析的最大障碍是 CAD 模型不能重新生成，特征参数不能反映那些修改研究的几何改变。
- (10) 采用全新的 Modelica 图形建模编辑器，提供了全新的建模环境，简化了复杂物理系统的建模过程。

(11) 为协同仿真、系统模型识别、系统工程流程连接以及嵌入式软件闭环测试提供了全新的支持。

1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤

矩阵分析法适用于由连杆或梁等单元组成的杆件结构，是一种具有朴素的有限元思想的非连续介质的力学分析方法，下面以矩阵分析法为例说明有限元分析的一般步骤。

1.2.1 矩阵分析法

杆系结构的矩阵分析方法从广义上说，也可以包括在有限单元法中，并且可以比较形象地说明有限单元法的概念，在实际工程中也有很大的应用价值。

1. 水平杆单元刚度矩阵

如图 1-1 所示的桁架，杆的两端都可以产生位移。为了循序渐进，先研究水平直杆 ij ，如图 1-2 所示。

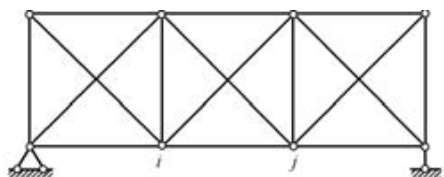


图 1-1 桁架



图 1-2 水平杆单元

杆单元两端各有一个水平节点位移 u_i 和 u_j ，即具有两个自由度。两端结节点力分别为 U_i 和 U_j 。

杆的受力情况可分解为两种状态。

(1) 状态一： $u_i = u_i, u_j = 0$ 。这时，节点 j 被固定。

单元应变为

$$\varepsilon = -\frac{u_i}{l}$$

单元应力为

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Eu_i}{l}$$

材料力学中以拉应力为正，而有限单元法中，以向右的节点力为正，所以单元左端节点力为

$$U_i = -A\sigma = \frac{AE}{l}u_i$$

单元右端节点力为

$$U_j = A\sigma = -\frac{AE}{l}u_i$$

(2) 状态二： $u_i = 0, u_j = u_j$ 。这种状态与状态一正好相反。

单元应变为

$$\varepsilon = \frac{u_j}{l}$$

单元应力为

$$\sigma = \frac{Eu_j}{l}$$

单元左端节点力为

$$U_i = -A\sigma = -\frac{AE}{l}u_j$$

单元右端节点力为

$$U_j = A\sigma = \frac{AE}{l}u_j$$

把以上两种状态的结果叠加起来，得到左、右两端都可变位情况下单元节点力为

$$U_i = \frac{AE}{l}u_i - \frac{AE}{l}u_j$$

$$U_j = -\frac{AE}{l}u_i + \frac{AE}{l}u_j$$

写成矩阵形式得到

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

其中，

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

式 (1-2) 称为单元刚度矩阵。刚度矩阵在有限单元法中是一个比较重要的概念，它能体现出任何一个自由度方向的节点力与所有节点位移之间的关系。

单元轴力可写为

$$N = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

其中，

$$\mathbf{S} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

在杆件结构中，通常以轴力作为广义应力，因此矩阵 \mathbf{S} 称为单元应力矩阵。

实际上，在节点 i 和 j ，除了水平位移外，还可产生垂直位移（但在小变形条件下，垂直节点位移对铰接杆的内力无影响）。引入垂直节点位移 v_i 、 v_j 和垂直节点力 V_i 、 V_j ，把单元刚度矩阵扩展为四阶形式，单元节点力为

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

或

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-6)$$

式中， $\mathbf{F}^e = [U_i \ V_i \ U_j \ V_j]^T$ 为节点力； $\boldsymbol{\delta}^e = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j]^T$ 为节点位移。

单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

单元轴力为

$$N = \frac{AE}{l} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \mathbf{S} \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-8)$$

2. 倾斜杆单元刚度矩阵

如图 1-3 所示, 局部坐标 \bar{x} 、 \bar{y} 与整体坐标 x 、 y 之间的位移 $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ 与 $\boldsymbol{\delta}$ 之间存在如下变换关系:

$$\bar{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\delta} \quad (1-9)$$

式中 转换矩阵

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

为正交矩阵, 其中, $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$ 。

则局部坐标系中节点力 $\bar{\mathbf{F}} = [\bar{U}_i \quad \bar{V}_i \quad \bar{U}_j \quad \bar{V}_j]^T$ 与整体坐标系中的节点力 $\mathbf{F} = [U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j]^T$ 之间的关系为

$$\bar{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{F} \quad (1-10)$$

局部坐标系中的节点力为

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\boldsymbol{\delta}} \quad (1-11)$$

其中, 局部坐标系中的刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}^e$ 见式 (1-7)。

将式 (1-9) 和式 (1-10) 代入式 (1-11) 得

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\lambda}^{-1} \bar{\mathbf{K}}^e \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\delta}$$

或记为

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta} \quad (1-12)$$

式 (1-12) 反映了单元节点位移与单元节点力的关系, 称为单元刚度方程。其中, $\mathbf{K}^e = \boldsymbol{\lambda}^{-1} \bar{\mathbf{K}}^e \boldsymbol{\lambda}$ 为整体坐标系中的单元刚度矩阵, 即

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

并将式 (1-12) 记为

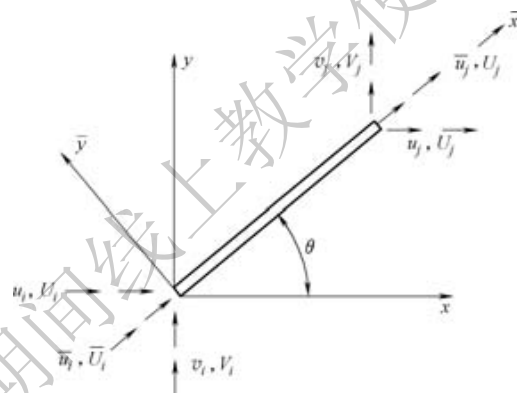


图 1-3 局部坐标与整体坐标

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \boldsymbol{\delta}_j \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

式中 i 点节点力 $\mathbf{F}_i = [U_i \ V_i]^T$; j 点节点力 $\mathbf{F}_j = [U_j \ V_j]^T$; i 点节点位移 $\boldsymbol{\delta}_i = [u_i \ v_i]^T$; j 点节点位移 $\boldsymbol{\delta}_j = [u_j \ v_j]^T$; $\mathbf{K}_{ii} = \mathbf{K}_{jj} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji} = -\mathbf{K}_{ii}$ 。刚度系数 \mathbf{K}_{ij} 的意义是节点 j 的单位节点位移在节点 i 上产生的节点力, 其余类推。

3. 节点平衡方程与整体刚度矩阵

从一个桁架中取一节点 i , 如图 1-4a 所示, 设环绕该点有三个单元, 即 ij 、 im 、 ip 。该节点承受的水平 and 垂直载荷分别为 X_i 和 Y_i , 即节点 i 的载荷 $\mathbf{P}_i = [X_i \ Y_i]^T$ 。

根据力的平衡, 作用于杆单元的节点力与作用于节点的节点力, 其大小相等, 方向相反。以杆 ij 为例, 作用于杆单元的节点力是

$[U_{ij} \ V_{ij}]^T$, 而作用于节点 i 的节点力是 $[-U_{ij} \ -V_{ij}]^T$ 。将节点脱离出来, 其受力分析如图 1-4b 所示, 在水平和垂直方向的节点受力平衡方程为

$$\begin{cases} X_i - U_{ij} - U_{im} - U_{ip} = 0 \\ Y_i - V_{ij} - V_{im} - V_{ip} = 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

由式 (1-14) 可知, 杆单元 ij 在节点 i 的节点力为

$$\mathbf{F}_{ij} = \begin{bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{ii} \boldsymbol{\delta}_i + \mathbf{K}_{ij} \boldsymbol{\delta}_j \quad (1-16)$$

其他单元施于节点 i 的节点力同样可以写出, 一起代入式 (1-15), 得到

$$\left(\sum_c \mathbf{K}_{ii} \right) \boldsymbol{\delta}_i + \mathbf{K}_{ij} \boldsymbol{\delta}_j + \mathbf{K}_{im} \boldsymbol{\delta}_m + \mathbf{K}_{ip} \boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{P}_i \quad (1-17)$$

每个节点都有一对平衡方程如上, 对于全部节点 $i=1, 2, \dots, N$ 的结构, 得到 $2N$ 阶线性方程组, 即结构的节点平衡方程组为

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{P} \quad (1-18)$$

式中

$$\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\delta}_1 \ \boldsymbol{\delta}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\delta}_N]^T$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_N]^T$$

其中 $\boldsymbol{\delta}$ 为全部节点位移组成的列阵; \mathbf{P} 为全部节点载荷组成的列阵; \mathbf{K} 为结构的整体刚度矩阵。

4. 总体刚度矩阵的合成

由单元刚度矩阵合成结构的整体刚度矩阵通常采用两种方法: 一种为编码法, 另一种为大域变换矩阵法。前者对自由度较少的结构简单明了, 后者特别适合计算机编程运算。下面重点阐述后者。

结构总体刚度矩阵 \mathbf{K} 与单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 之间的关系为

$$\mathbf{K} = \sum_c (\mathbf{G}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{G}^e \quad (1-19)$$

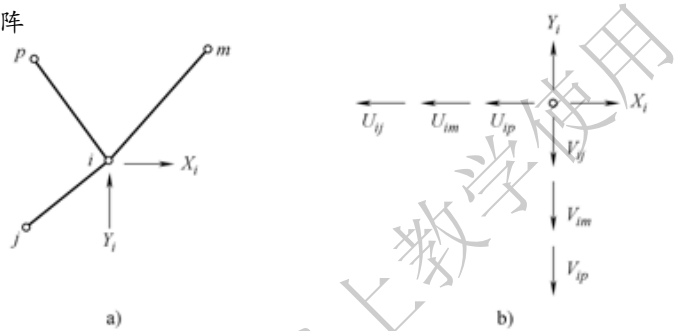


图 1-4 节点 i 的平衡

式中 \mathbf{G}^e 为单元大域变换矩阵。对平面桁架结构，单元自由度 $m=4$ ，节点自由度为 $h=2$ ，整个结构有 n 个节点，则该单元大域变换矩阵为 $m \times (hn)$ 维。其中 ij 单元假定为全局单元编号中第 3 个，其大域变换矩阵为

$$\mathbf{G}^3 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \cdots & 2i-1 & 2i & \cdots & 2j-1 & 2j & \cdots & 2n \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

另外，总体结构的载荷向量、位移向量与单元载荷向量、位移向量之间的关系为

$$\mathbf{P} = \sum_e (\mathbf{G}^e)^T \mathbf{P}^e \quad (1-21)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \sum_e (\mathbf{G}^e)^T \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-22)$$

5. 边界条件的处理

边界条件是指结构边界上所受到的外加约束。边界上的节点通常有两种情况。一种可以自由变形，如图 1-5 中的节点 5、6、7、8 等，这时只要让这些节点上的载荷等于零就可以了。如果节点 3 作用有外载荷，可令该点的载荷等于规定的载荷 Q 。另一种是边界上的节点，规定了节点位移的数值，如图 1-5 所示为桁架，有

$$u_1 = v_1 = v_4 = 0, v_2 = b$$

这时，是否可以把规定的位移数值直接放到平衡方程 $\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}$ 中去呢？当采用迭代法求解时，是可以这样做的。如果采用直接法求解时，就不能这样做了，因为直接法是以全部节点位移都是未知量为基础的。

现在把结构平衡方程组重新排列为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ab}^T & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_a \\ \boldsymbol{\delta}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{\delta}_b$ 为已知的节点位移； $\boldsymbol{\delta}_a$ 为未知的节点位移； \mathbf{P}_a 为已知的节点载荷； \mathbf{P}_b 为未知的支点反力。只要已给出的位移 $\boldsymbol{\delta}_b$ 足以阻止结构的刚体移动，则子矩阵 \mathbf{K}_{aa} 将是非奇异的，可以解出未知的节点位移为

$$\boldsymbol{\delta}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1} (\mathbf{P}_a - \mathbf{K}_{ab} \boldsymbol{\delta}_b)$$

进而求出未知支点反力为

$$\mathbf{P}_b = (\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{ab}^T \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab}) \boldsymbol{\delta}_b + \mathbf{K}_{ab}^T \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{P}_a$$

上面我们说明了求解平衡方程组的步骤，但在有限单元法中，未知量的个数通常有几百个，甚至几万个，一般都利用计算机进行求解。给定位移的节点和给定载荷的节点实际上是交错出现的。通常为了程序设计的方便，刚度矩阵 \mathbf{K} 的行序和列序都不改变，而做下述处理。

设结构的平衡方程为

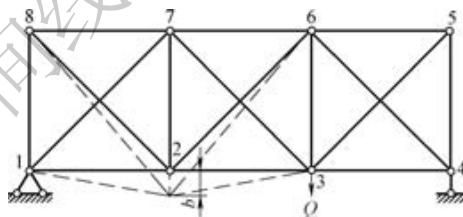


图 1-5 桁架

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & \cdots & k_{1,16} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & \cdots & k_{2,16} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & \cdots & k_{3,16} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & \cdots & k_{4,16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{16,1} & k_{16,2} & k_{16,3} & k_{16,4} & \cdots & k_{16,16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_8 \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

对 $u_1=0$, 式 (1-23) 做如下变化: 在刚度矩阵 \mathbf{K} 中, 把与 u_1 对应的对角线上的刚度系数 $k_{1,1}$ 换为一个极大的数, 例如可换成 $k_{1,1} \times 10^8$; 把与 u_1 对应的节点载荷换成 $k_{1,1} \times 10^8 \times u_1 = 0$, 其余保留不变。对其他边界条件可以类推。

通过上述变化, 式 (1-23) 中节点位移列阵成为未知量, 载荷列阵成为已知向量, 两端左乘刚度矩阵的逆阵可以求出节点位移, 进而得到节点力和单元内力。上述以位移作为未知量求解并表示出节点力和单元内力的方法, 称为“位移法”, 相应的有限单元法为“位移法有限元”。以单元内力为未知量的有限元方法称为“力法有限元”, 工程中采用不多。

【例】桁架结构的平衡方程。

如图 1-6 所示的桁架结构, 支承条件 $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$, $u_3 = b$ 。该桁架共有 6 个杆单元, 各单元的尺寸和倾角见表 1-1。试列出该桁架结构的平衡方程。

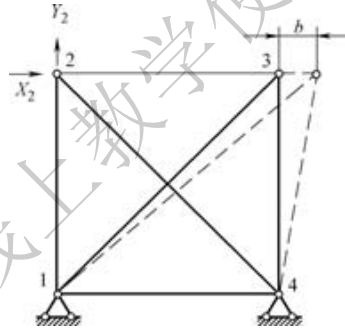


图 1-6 桁架

表 1-1 单元结构尺寸

杆单元	i 点	j 点	面积	长度	弹性模量	倾角 $\theta/(\circ)$	$\alpha = \cos\theta$	$\beta = \sin\theta$	α^2	β^2	$\alpha\beta$
12	1	2	A	l	E	90	0	1	0	1	0
13	1	3	A	$\sqrt{2}l$	E	45	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
14	1	4	A	l	E	0	1	0	0	0	0
23	2	3	A	l	E	0	1	0	0	0	0
24	2	4	A	$\sqrt{2}l$	E	315	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
34	3	4	A	l	E	270	0	-1	0	1	0

求解步骤

(1) 根据前述列出各单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^{12} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{13} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \dots$$

(2) 列出各单元的大域变换矩阵

$$\mathbf{G}^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

(3) 进而计算整体刚度矩阵 \mathbf{K} , 写出结构总体平衡方程

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1.914 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{bmatrix}$$

(4) 引入边界条件后, 得到

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 \times 10^8 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 \times 10^8 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ 1.914 \times 10^8 \times b \\ Y_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2.2 有限单元法分析的一般步骤

1. 结构离散化

结构离散化就是将结构分成有限个小的单元体, 单元与单元、单元与边界之间通过节点连接。结构的离散化是有限单元法分析的第一步, 关系到计算精度与计算效率, 是有限单元法的基础步骤, 包含以下三个方面的内容:

(1) 单元类型选择。离散化首先要选定单元类型, 这包括单元形状、单元节点数与节点自由度数的三个方面的内容。

(2) 单元划分。划分单元时应注意以下几点: ①网格划分越细, 节点越多, 计算结果越精确。网格加密到一定程度后计算精度的提高就不明显, 对应力应变变化平缓的区域不必要细分网格。②单元形态应尽可能接近相应的正多边形或正多面体, 如三角形单元三边应尽量接近, 且不出现钝角; 矩形单元长、宽不宜相差过大等。③单元节点应与相邻单元节点相连接, 不能置于相邻单元边界上。④同一单元由同一种材料构成。⑤网格划分应尽可能有规律, 以利于计算机自动生成网格。

(3) 节点编码。

2. 单元分析

通过对单元的力学分析建立单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 。

3. 整体分析

整体分析包括以下几方面内容：

(1) 集成整体节点载荷向量 P 。结构离散化后，单元之间通过节点传递力，所以有限单元法在结构分析中只采用节点载荷，所有作用在单元上的集中力、体积力与表面力都必须静力等效地移置到节点上去，形成等效节点载荷。最后，将所有节点载荷按照整体节点编码顺序组集成整体节点载荷向量。

(2) 集成整体刚度矩阵 K ，得到总体平衡方程为

$$K\delta = P$$

(3) 引进边界约束条件，解总体平衡方程，求出节点位移。

1.3 ANSYS 的基本操作

ANSYS 的界面与操作无论版本怎样变化，始终以原貌为主，仅做少量的改进，具有较强的继承性，形成了自己固有的风格，具有操作直观易行的特点。本书论述以符号“>”表示进入下一级菜单或选择项，这也是 ANSYS 的默认格式。

1.3.1 ANSYS 的安装

下面提供在 Windows 7/Windows10 操作系统下可供参考的 ANSYS18.0 安装步骤：

(1) 将 ANSYS Products 18.0 x64 文件夹拷到硬盘上，Windows7 系统下用虚拟光驱 Daemon Tools 分别加载 Disk1 和 Disk2 镜像文件；Windows10 系统下可直接从右键打开方式中选择 Windows 资源管理器加载镜像文件。

(2) 安装主程序之前检查是否缺少必要程序，单击 PreReqCheck.exe，提示不需要安装其他程序；若缺少必要程序，则单击 InstallPreReqs.exe 安装缺少的程序。

(3) 运行安装主程序，单击 setup.exe。

(4) 弹出初始安装菜单，按照从上至下的顺序，单击 Install ANSYS, Inc. Products，开始安装 ANSYS18.0 程序。单击同意，选择安装目录，单击下一步，在 Hostname 栏中，填入计算机名（计算机名在系统属性里寻找），继续单击下一步，选择 ANSYS18.0 程序的各个安装组件与模块。接下来几步是进行三维 CAD 软件关联配置，可以选择每个三维 CAD 软件的安装目录进行关联配置，如果系统没有安装 CAD 软件也可以选择 skip（跳过）设置，待以后需要时再进行配置。

(5) 确认安装信息，单击 Next 进行下一步，开始自动安装。

(6) 在 Disk1 安装完毕后，依据提示选择 Disk2 继续安装，安装完毕后单击 Exit 退出，完成主程序安装。


(7) 将 ANSYS Products 18.0 x64 文件夹中的 Shared Files 文件夹拷入到安装目录下即完成安装。

安装成功后，可以从“开始菜单>程序>ANSYS18.0”选择启动 Mechanical APDL 18.0、Mechanical APDL Product Launcher 18.0 及 Workbench18.0 平台。

1.3.2 ANSYS 的启动、用户界面及退出

ANSYS 软件有很多版本，可运行于从 PC、NT 工作站、UNIX 工作站直至巨型机的各类计算机及操作系统中，数据文件在其所有的产品系列和工作平台上均兼容。目前最新的版本是 ANSYS18.0 版，也是本书所述的默认版本。

第一次启动 ANSYS 软件应进行 ANSYS 产品选择、默认工作路径和文件名设定，路径为：开始>ANSYS 18.0> Mechanical APDL Product Launcher 18.0，启动后出现如图 1-7 所示【18.0: ANSYS Mechanical APDL Product Launcher】对话框。进行一般结构分析时，在【Simulation Environ-

ment:】下拉框中选择“ANSYS”；在【License:】下拉框中选择“ANSYS Multiphysics”；在【Working Directory:】文本框中输入工作文件存取路径；在【Jobname:】文本框中输入文件名，如果不输入则默认文件名为“file”；单击按钮  运行 ANSYS。以后启动路径为：开始>ANSYS 18.0>Mechanical APDL 18.0。启动后出现两个窗口：其一为输出窗口，显示软件的文本输出，通常在其他窗口的后面，需要查看时可提到前面；其二如图 1-8 所示，为 ANSYS 用户界面（GUI），下面介绍 GUI 的主要组成部分。

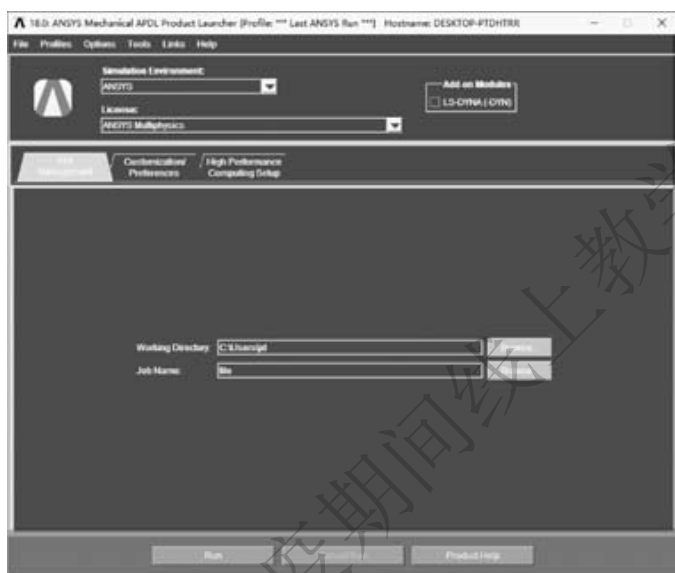


图 1-7 【18.0: ANSYS Mechanical APDL Product Launcher】对话框

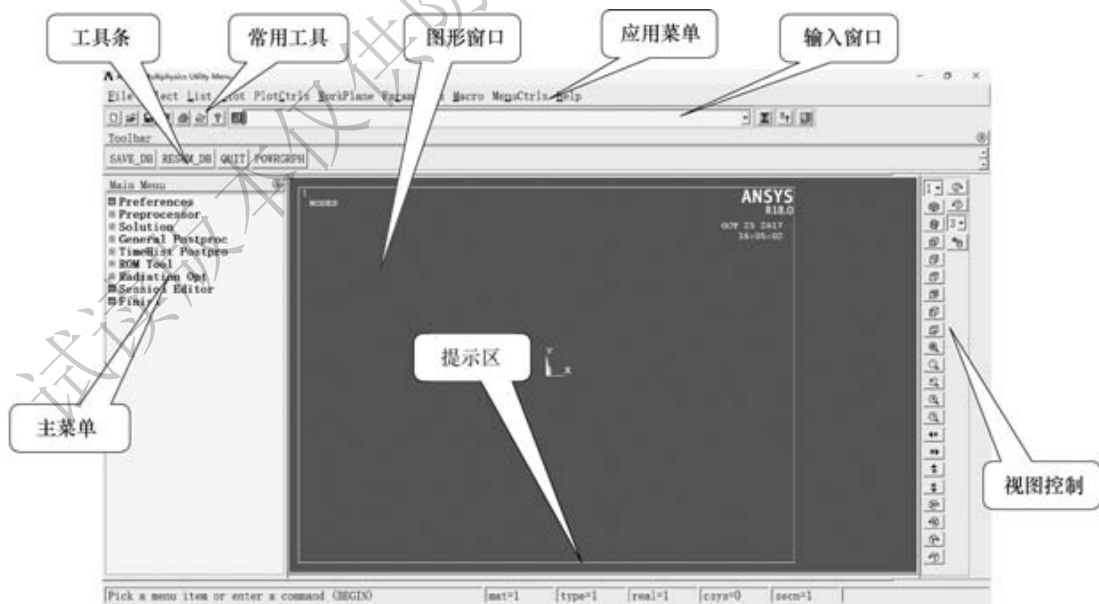


图 1-8 ANSYS 的用户界面（GUI）

1. 应用菜单

应用菜单（Utility Menu）包含文件管理、选择、显示控制、参数设置等应用功能。该菜单

为下拉式结构，可直接完成某一功能或弹出对话框，其中包含各种应用命令，如 File（文件）、Select（选择）、List（列表）、Plot（画图）、PlotCtrls（图形控制）、WorkPlane（工作平面）、Parameters（参数控制）、Macro（宏）、Menu Ctrls（菜单控制）和 Help（帮助）。

在此特别说明，ANSYS 提供三种方式打开帮助：①通过 Utility Menu>Help 菜单，查看各命令、单元的使用方法，各种问题的分析步骤和案例；②单击各步操作对话框中的 **Help** 按钮，可见该对话框的使用具体方法；③在输入窗口（下面述及）输入 HELP 命令对各指令的使用提供帮助。

2. 主菜单

主菜单中包括各种功能命令。包括前处理模块中使用的单元、截面、材料、结构造型、网格划分等，求解模块中的载荷、约束、求解参数和求解等，还有后处理模块中的列表显示结果、图形显示结果等。在菜单前若有“**+**”符号，表示该菜单还有子菜单；在菜单前若有“**☐**”符号，表示单击该菜单会弹出对话框。

3. 工具条

工具条中放置最常用的功能，用户单击应用菜单 Menu Ctrls>Edit Toolbar 可以自定义工具条按钮的功能。

4. 命令行窗口

命令行窗口又称输入窗口，是键入命令的地方，对于习惯使用命令流的用户，命令行窗口经常被使用。

5. 图形窗口

图形窗口显示当前处理的数据，包括前处理中的节点、单元等和后处理中的应力、应变分布等。ANSYS 中最多可以同时打开 5 个图形窗口，其序号分别为 1、2、3、4、5。从应用菜单 Plot Ctrls>Window Controls>Window On or Off 可以设置图形窗口的个数。

6. 视图控制窗口

视图控制窗口位于图形窗口的右侧，单击此处的按钮可以控制图形窗口的视图角度、比例等。

7. 提示区

提示区可提示下一步如何操作及当前材料特性、单元类型、实体常数、坐标系统及图形窗口等信息。

操作结束退出时，在 ANSYS 主窗口中执行 Utility Menu>File>Exit 命令或单击工具栏中的

QUIT 按钮，弹出如图 1-9 所示的【Exit from ANSYS】的对话框。其中的四个单选按钮如下：

(1) SAVE Geom+Loads：选择后退出时保存工作中的几何模型、载荷以及约束。

(2) SAVE Geo+Ld+Solu：选择后退出时保存模型、约束和求解的结果。

(3) SAVE Everything：选择后保存所做的修改。

(4) Quit-No Save!：选择后不保存所做的修改。

选择所需的单选按钮，单击 **OK** 按钮退出。第一

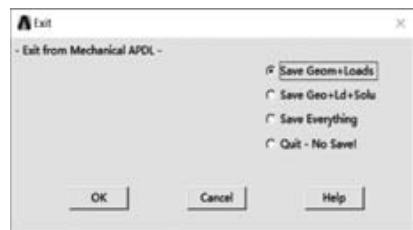


图 1-9 【Exit from ANSYS】对话框

次进行 ANSYS 产品选择后退出时，到【18.0: ANSYS Mechanical APDL Product Launcher】对话框下，由 File>Exit 最后退出 ANSYS。

1.3.3 ANSYS 的操作方式

ANSYS 有 GUI 方式和命令方式两种操作方式。

1. GUI 方式

GUI 由窗口、菜单、对话框和其他组件组成，只要单击相应的按钮或在相应的位置输入相应值即可完成所需的功能。

2. 命令方式

ANSYS 大约有 1200 多个命令，每个命令实现一个特定的功能。大多数命令都与特定的处理器（如前处理器、求解器和后处理器等）关联，并且也只能在其中使用，否则将出现警告信息。

为了使用某个功能，可使用命令输入或 GUI 方式，在帮助文件的“ANSYS 命令参考手册”中详细描述了所有 ANSYS 命令并列出了与其对应的 GUI 方式，但并不是所有 ANSYS 命令都有与之对应的 GUI 方式。本书中论述以 GUI 方式为主，同时附上命令流文件。下面简要说明“命令方式”应注意的事项。

一个典型的命令总是由命令名、逗号和其他值构成，逗号起分隔符的作用。例如，在一个节点上施加一个力载荷的 F 命令格式为“F, NODE, Lab, VALUE”，如果要在编号为 25 的节点上施加一个 X 方向的载荷 2000，则该命令的格式如下为“F, 25, FX, 2000”。

在大多数情况下，用户可简化较长的命令名为其开始的 4 个字符，如 FINISH 可简化为 FINI。某些命令实际上是一个宏命令名。以“/”开始的命令，如/PREP7 通常完成一般性的软件控制任务，如启动软件、管理文件和控制图形等。以“*”开始的命令，如 *GET 是 ANSYS 参数化设计语言中的命令。命令中的值可以是数字或字符，这取决于该命令的功能。在“ANSYS 命令参考手册”中数字一般出现在全部为大写斜体字母处，如 F 命令中的 NODE 和 VALUE，字符一般出现在第一个字母为大写的斜体字母处，如 F 命令中的 Lab。/PREP7 和/POST1 等命令只有命令名，而没有值。使用命令的规则如下：

- (1) 进入命令后，赋值必须要与特定的位置相对应。
- (2) 连续使用的逗号之间表示有值被省略，ANSYS 将使用默认值替代省略的值。
- (3) 在同一行中可以输入使用符号 \$ 分隔的多个命令，分隔符的使用限制可参考“ANSYS 命令参考手册”。在一行中最多可输入 640 个字符，其中包括逗号、空格、分隔符 \$ 和其他特定字符。
- (4) 对要求是整数的位置，若输入为实数，系统自动取整到最近的整数。输入整数的绝对值必须在 0~99999999 之间。
- (5) 实数范围为 $\pm(10^{-60} \sim 10^{60})$ ，系统将接受整数域中的实数并将其取整到最近的整数，用户可以采用小数或指数形式输入实数。在指数形式中，E 或 D 字符表示一个指数，没有大小写之分，这个限制适用于所有平台的 ANSYS 命令。
- (6) 在默认状态下，角度输入的数字单位是度。如果执行命令 *AFUN，则 ANSYS 中的函数也可以使用弧度作为角度的单位。

(7) 不能出现在命令输入的字符值中的特殊字符如下：

! @ # \$ % ^ & * () _ - +
= | \ { } [] “ ‘ / < > ~

(8) 由一个“!”(感叹号)引出的任何字符均将作为一个说明语句处理。

1.3.4 ANSYS 的典型分析过程

下面以悬臂梁的受力分析为例简要说明 ANSYS 分析问题的操作步骤。

问题描述

图 1-10 所示为一个工字悬臂梁,在力 P 作用下求该梁 A 点的挠度。其中长度 $L=1\text{m}$,外表面高度 $H=50\text{mm}$,内侧面高度 $h=43\text{mm}$,宽度 $B=35\text{mm}$,中间支梁宽度 $b=32\text{mm}$,作用力 $P=1000\text{N}$,弹性模量 $E=2\times 10^{11}\text{Pa}$ (钢材),泊松比为 0.3。

通常先执行 Utility Menu>Change Directory...,来设定工作目录,否则默认工作目录为安装盘的根目录。该操作以后不再说明。



图 1-10 悬臂梁受力

操作步骤

(1) 定义工作文件名。执行 Utility Menu>File>Change Jobname 命令,在弹出的【Change Jobname】对话框中输入“beam”,选择【New log and error files】复选框,单击 **OK** 按钮。

(2) 选择单元类型。拾取菜单 Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete,弹出如图 1-11 所示的【Element Types】对话框,单击“**Add...**”按钮,弹出如图 1-12 所示的【Library of Element Types】对话框,在左侧列表中选“Beam”,在右侧列表中选“2 node 188”,单击 **OK** 按钮,返回如图 1-11 所示的【Element Types】对话框,单击“**Close**”按钮。



图 1-11 【Element Types】对话框

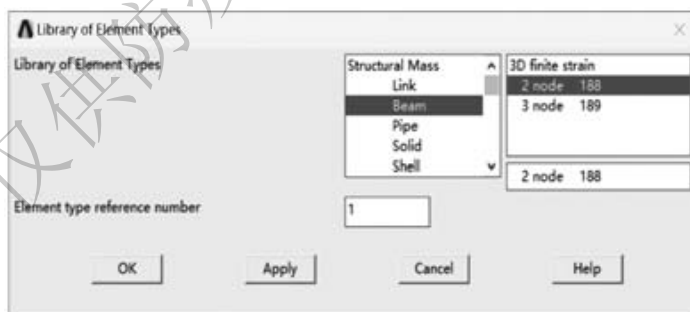


图 1-12 【Library of Element Types】对话框

(3) 定义梁的横截面。拾取菜单 Main Menu>Preprocessor>Sections>Beam>Common Sections,弹出如图 1-13 所示的【Beam Tool】对话框,选择“Sub-Type”为“1”(横截面形状),在“W1”“W2”“W3”“t1”“t2”“t3”文本框中分别输入 0.035、0.035、0.05、0.0035、0.0035、0.003,单击 **OK** 按钮。

(4) 定义材料属性。拾取菜单 Main Menu>Preprocessor>Material Props>Material Models,弹出如图 1-14 所示的【Define Material Models Behavior】对话框,在右侧列表中依次拾取 Structural>Linear>Elastic>Isotropic 选项,弹出如图 1-15 所示的【Linear Isotropic Material Properties for Material Number 1】对话框,在“EX”文本框中输入 $2e11$ (弹性模量),在“PRXY”文本框中输入 0.3

(泊松比)，单击 **OK** 按钮，然后关闭如图 1-14 所示的【Define Material Models Behavior】对话框。



图 1-13 【Beam Tool】对话框

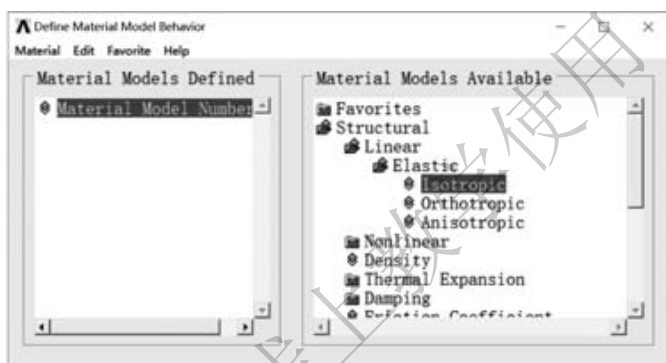


图 1-14 【Define Material Models Behavior】对话框

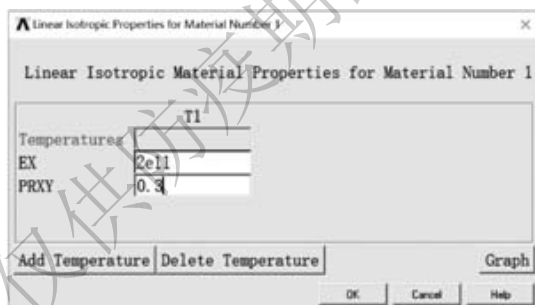


图 1-15 【Linear Isotropic Material Properties for Material Number1】对话框

(5) 创建关键点。拾取菜单 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS，弹出如图 1-16 所示的【Creat Keypoints in Active Coordinate System】对话框，在“NPT Keypoint number”文本框中输入 1，在“X, Y, Z Location in active CS”文本框中分别输入 0, 0, 0，单击 **Apply** 按钮；再在“NPT Keypoint number”文本框中输入 2，在“X, Y, Z Location in active CS”文本框中分别输入 1, 0, 0，单击 **Apply** 按钮；再在“NPT Keypoint number”文本框中输入 3，在“X, Y, Z Location in active CS”文本框中分别输入 0.5, 0.5, 0，单击 **OK** 按钮。

(6) 显示关键点号。拾取菜单 Utility Menu>PlotCtrls>Numbering，在所弹出的对话框中，将 Keypoint numbers (关键点号) 打开，单击 **OK** 按钮。

(7) 创建直线。拾取菜单 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Lines>Straight Line，弹出拾取窗口，拾取关键点 1 和 2，单击 **OK** 按钮。

(8) 划分单元。拾取菜单 Main Menu>Preprocessor>Meshing>MeshTool，弹出“MeshTool”对

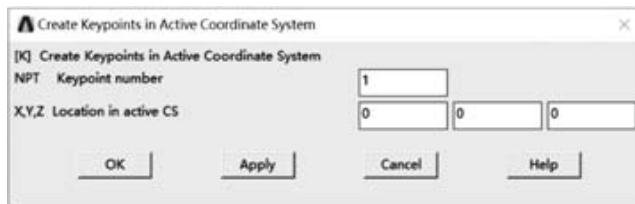


图 1-16 【Creat Keypoint in Active Coordinate System】对话框

话框，选择“Element Attributes”的下拉列表框中选择“Lines”，单击下拉列表框后面的“Set”按钮，弹出拾取窗口，选择线，单击 **OK** 按钮，弹出如图 1-17 所示的【Line Attributes】对话框，选择“Pick Orientation Keypoint (s)”为 Yes，单击 **OK** 按钮；弹出拾取窗口，选择关键点 3，单击 **OK** 按钮，则横截面垂直于关键点 1、2、3 所在的平面，z 轴指向关键点 3。

单击“Size Controls”区域中“Lines”后面的“Set”按钮，弹出拾取窗口，拾取直线，单击 **OK** 按钮，弹出如图 1-18 所示的【Element Sizes on Picked Lines】对话框，在“NDIV No. of element divisions”文本框中输入 50，单击 **OK** 按钮。单击“MeshTool”对话框中“Mesh”区域的 **Mesh** 按钮，弹出拾取窗口，拾取直线，然后单击 **OK** 按钮。

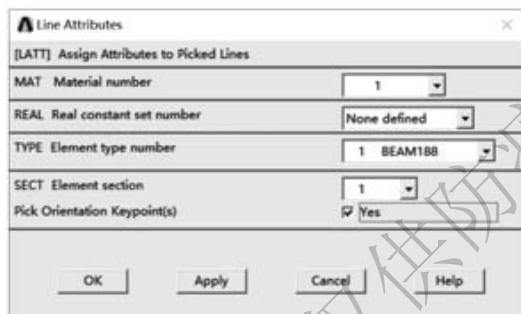


图 1-17 【Line Attributes】对话框

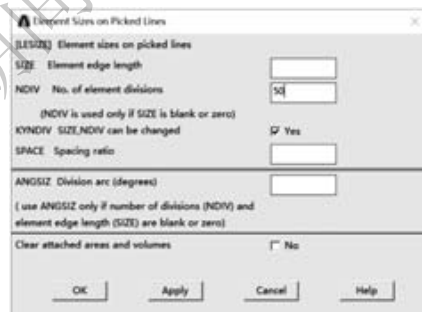


图 1-18 【Element Sizes on Picked Lines】对话框

(9) 施加约束。拾取菜单 Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Keypoints，弹出拾取窗口，拾取关键点 1，单击 **OK** 按钮，弹出如图 1-19 所示的【Apply U, ROT on KPs】对话框，在列表中选“All DOF”选项，单击 **OK** 按钮。

(10) 施加载荷。拾取菜单 Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Keypoints，弹出拾取窗口，拾取关键点 2，单击 **OK** 按钮，弹出如图 1-20 所示的【Apply F/M on KPs】对话框，选择“Lab Direction of force/mom”下拉列表中选择“FY”，在“VALUE Displacement value”文本框中输入-1000，单击 **OK** 按钮。

(11) 求解。拾取菜单 Main Menu>Solution>Solve>Current LS。单击“Solve Current Load Step”对话框中的 **OK** 按钮。当出现“Solution is done!”提示时，求解结束，即可查看结果。

(12) 查看结果，显示变形。拾取菜单 Main Menu>General Postproc>Plot Results>Deformed Shape，在所弹出的对话框中，选中“Def shape only”，单击 **OK** 按钮，结果如图 1-21 所示，从图 1-21 中可以看出，最大位移为 0.011019m，与理论结果一致。

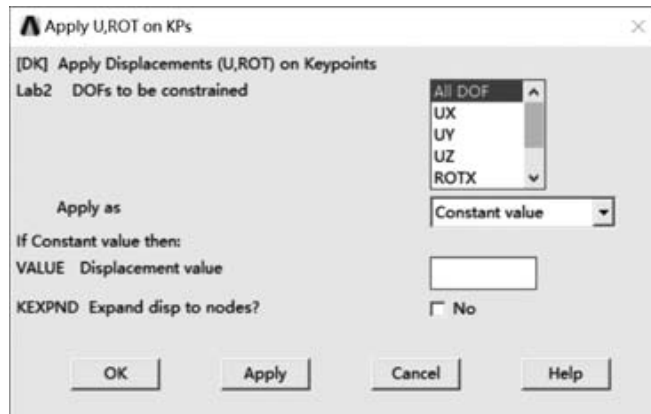


图 1-19 【Apply U, ROT on KPs】对话框

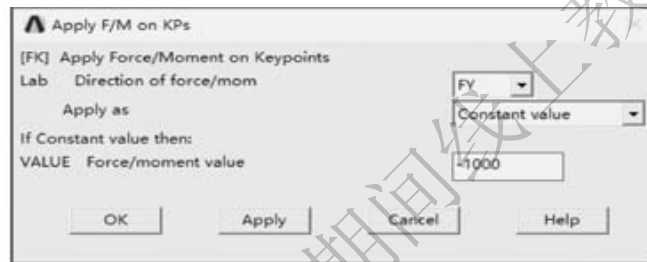


图 1-20 【Apply F/M on KPs】对话框

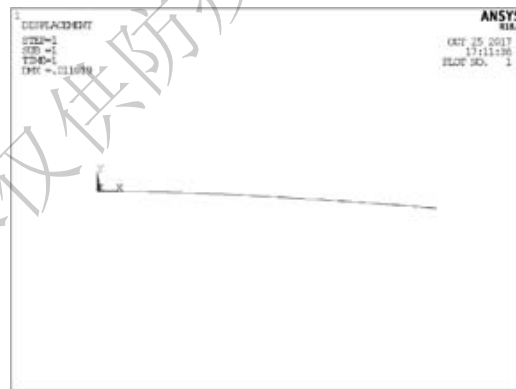


图 1-21 结果显示

命令流

```

/CLEAR
/FILNAME, EXAMPLE7
/PREP7
ET, 1, BEAM188
SECTYPE, 1, BEAM, I
SECOFFSET, CENT
SECDATA, 0.035, 0.035, 0.05, 0.0035,
0.0035, 0.003
MP, EX, 1, 2E11
MP, NUXY, 1, 0.3
K, 1, 0, 0, 0
K, 2, 1, 0, 0
    
```

K, 3, 0.5, 0.5, 0	DK, 1, ALL
LSTR, 1, 2	FK, 2, FY, -1000
LESIZE, 1, , , 50	SOLVE
LATT, , , , 3	FINISH
LMESH, 1	/POST1
FINISH	PLDISP
/SOLU	FINISH

1.3.5 ANSYS 的文件管理及日志文件使用

1. 文件管理

可采用下列方法之一指定文件名。

GUI: Utility Menu>File>Change Jobname。

命令: /FILENAME。

扩展名通常是一个包含 2~4 个字符的 ANSYS 能够识别的标识符。

(1) 文件类型及其格式。文件类型及格式见表 1-2。ANSYS 的命令: /ASSIGN、/* LIST、/COPY、/OUTPUT、/* CREATE、/PSEARCH、/DELETE、/RENAME、/INPUT 要求指定文件名、扩展名和路径, 其中文件名最多为 32 个字符, 扩展名最多为 8 个字符, 路径为 64 个字符且不包含空格。在 Windows 系统中, 要使用“\”表示路径中出现的斜线。

表 1-2 文件类型能够及格式

文件类型	文件名	文件格式
日志文件	Jobname.log	文本
错误文件	Jobname.err	文本
输出文件	Jobname.out	文本
数据文件	Jobname.db	二进制
结果文件 结构与耦合分析 热分析 磁场分析 流体分析	Jobname.rst Jobname.rth Jobname.rmg Jobname.rfl	二进制
载荷步文件	Jobname.SN	文本
图形文件	Jobname.grph	文本
单元矩阵文件	Jobname.emat	二进制

(2) 文件长度。最大长度取决于系统的限制和在该系统下处理大容量文件的能力, 如果超过, ANSYS 将自动分割文件。

(3) 日志文件 (Jobname.log)。日志文件中记录用户使用 ANSYS 的全过程。启动 ANSYS 后, 该文件处于打开状态, 可浏览或编辑。

2. 日志文件使用

无论在输入行输入命令, 还是在 GUI 方式下执行操作, 系统均将执行情况记录在两个对话日志文件和内部数据命令日志中, 前者是一个文本文件, 保存在用户的工作目录中; 后者保存在 ANSYS 数据库中。

(1) 使用对话日志文件。启动 ANSYS, 选择打开对话日志文件, 每一次新的 ANSYS 对话都

将以命令流形式追加到已有的 Jobname.log 文件中。该文件对从系统崩溃和灾难性的用户错误中恢复非常有用。从重新命名的日志文件的备份中，用户能够重新执行其中的每个命令，精确地生成与前面相同的数据。日志文件也可作为一种调试工具，帮助修复任何在执行中产生的错误。使用 /Filename, 1 命令可以重新定义一个新的日志文件。在交互运行方式下，执行下列命令列表日志文件：Utility Menu>List>Files>Log File。

(2) 使用数据命令日志。用户保存数据时，将数据命令日志与其他数据信息保存在数据文件 (Jobname.DB) 中。使用下列命令之一可以将数据命令日志写入一个 ASCII 文件中。

GUI: Utility Menu>File>Write DB log file。

命令: LGWRITE。

可编辑这个文件，或用其作为命令输入（如优化设计中）。如果需要使用交互方式生成的命令过程，并且与用户数据对应的对话日志文件已丢失或破坏时，该日志非常有用。

如果通过多次保存与恢复操作生成了数据文件，则系统通过追加每个新的命令保持数据日志文件的连续性。因此内部数据日志并不分段，而是保持为一个整体。但 RESUME 命令不写入到数据日志中。

(3) 输入命令日志文件。在交互模式下读入编辑的日志文件，可采用下列方法之一。

GUI: Utility Menu>File>Read Input Form。

命令: /INPUT。

在批处理模式下，也可将编辑的日志文件作为批处理的输入文件使用。

1.4 本章小结

本章简要地介绍了有限元方法与 ANSYS 软件的发展现状，给出了有限元方法的基本思想：将物体（即连续的求解域）离散成有限个且按一定方式相互联结在一起的单元的组合，来模拟或逼近原来的物体，从而将一个连续的无限自由度问题简化为离散的有限自由度问题求解的一种数值分析法。其理论基础是加权余量法中的伽辽金 (Galerkin) 法和变分原理中的里兹 (Ritz) 法。

本章给出了广义有限元法包括杆系结构的矩阵分析法。然后通过矩阵分析法介绍了有限元方法的分析步骤，并引出系列概念，如节点、节点力、刚度矩阵、应力矩阵、平衡方程等。有限元方法分析的步骤分为结构离散化、单元分析、整体分析三步。

本章还介绍了 ANSYS18.0 的安装方法。其界面主要包括应用菜单、主菜单、工具条、命令行窗口、图形窗口、视图控制窗口、提示区等窗口组成部分。以悬臂梁受力分析为例，说明了 ANSYS 操作过程大体分为建立有限元模型（前处理）、施加载荷并求解（求解）、浏览计算结果（后处理）三步。ANSYS 的操作方式有 GUI 和命令流方式两种。操作过程在日志文件中都有记录。

1.5 思考与练习

1. 概念题

- (1) CAE 的概念是什么？
- (2) 有限单元法的基本思想是什么？
- (3) 单元、节点概念的定义是什么？

- (4) 节点力与节点载荷的区别是什么？
(5) 说明 ANSYS 软件日志文件的种类和作用。

2. 计算操作题

(1) 给图 1-22 所示的各节点编号，写出边界条件及各单元的大域变换矩阵。

(2) 如图 1-23 所示，上下两段连杆的弹性模量 $E_1 = E_2 = 3.0 \times 10^7 \text{ Pa}$ ，截面积 $A_1 = 5.25 \text{ m}^2$ ， $A_2 = 3.75 \text{ m}^2$ ，长度 $l_1 = l_2 = 12 \text{ m}$ ，向下拉力 $P = 100 \text{ N}$ 。用矩阵分析法求 1、2、3 点的位移。

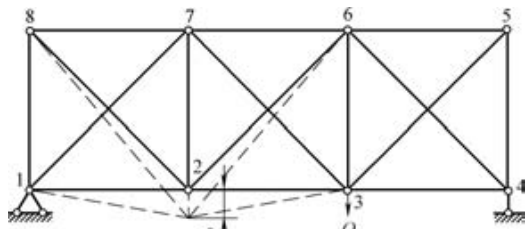


图 1-22 桁架

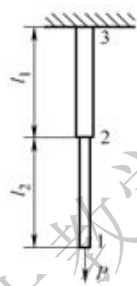


图 1-23 两段连杆

第 2 章 有限单元法基础理论

第 1 章介绍了有限单元法的基本思想及 ANSYS 分析问题的步骤，本章进一步讲述有限单元法的基础理论及其在结构静力学、动力学、结构非线性分析中的应用，这是学习使用 ANSYS 软件各操作步骤，对各种问题进行有效的处理和近似，简化求解过程，并建立有效模型的基础。

【本章重点】

- 平面问题的特点及与轴对称问题的区别。
- 刚度矩阵的求解与平衡方程的推导。
- 等参单元与等数变换。
- 结构动力学问题中质量与阻尼的处理。
- 大变形问题、塑性问题与线弹性问题有限单元法计算过程的根本区别。

2.1 结构静力学问题的有限元法

梁结构问题比桁架复杂一些，也可用矩阵分析法（线性代数方程组）得到问题的精确解。在 ANSYS 软件中上述两类问题的建模和求解较为简单。定义单元用 ET 指令，考虑材料各种特性选不同的 Link、Beam 单元。

有限单元法把杆系结构的矩阵分析方法推广应用于连续介质：把连续介质离散化，用有限个单元的组合物代替原来的连续介质，这样一组单元只在有限个节点上相互连接，因而包含有限个自由度，可用矩阵方法进行分析。

2.1.1 平面问题有限元法

对一些特殊情况可把空间问题近似地简化为平面问题，只需考虑平行于某个平面的位移分量、应变分量与应力分量，且这些量只是两个坐标的函数。平面问题分为平面应力问题和平面应变问题两类。

设有很薄的均匀薄板，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化，记薄板的厚度为 t ，以薄板的中心面为 xy 面，以垂直于中心面的任一直线为 z 轴，由于板面上不受力，且板很薄，外力不沿厚度变化，可以认为恒有

$$\sigma_z = 0, \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$$

不为零的应力分量为 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} ，这种问题就称为平面应力问题。

设无限长的柱形体，在柱面上受有平行于横截面并且不沿长度变化的面力，同时，体力也平行于横截面并且不沿长度变化。以任一横截面为 xy 面，任一纵线为 z 轴，由于对称性（任一横截面都可以看作对称面），此时

$$w = 0, \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

不为零的应变分量为 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} ，这种问题就称为平面应变问题。

二维连续介质，用有限单元法分析的步骤如下：

(1) 用虚拟的直线把原介质分割成有限个平面单元，这些直线是单元的边界，几条直线的

交点即为节点。

(2) 假定各单元在节点上互相铰接，节点位移是基本的未知量。

(3) 选择一个函数，用单元的三个节点的位移唯一地表示单元内部任一点的位移，此函数称为位移函数（位移模式）。

(4) 通过位移函数，用节点位移唯一地表示单元内任一点的应变；再利用广义虎克定律，用节点位移可唯一地表示单元内任一点的应力。

(5) 利用能量原理找到与单元内部应力状态等效的节点力，再利用单元应力与节点位移的关系，建立等效节点力与节点位移的关系。这是有限单元法求解应力问题最重要的一步。

(6) 将每一单元所承受的载荷，按静力等效原则移置到节点上。

(7) 在每一节点建立用节点位移表示的静力平衡方程，得到一个线性方程组；解出这个方程组，求出节点位移；然后可求得每个单元的应力。

1. 单元的位移模式及插值函数

由于三角形单元对复杂边界有较强的适应能力，因此很容易将一个二维域离散成有限个三角形单元。在边界上以若干段直线近似原来的曲线边界，随着单元的增多，这种拟合也将越精确。下面以 3 节点三角形单元为代表讨论平面问题的有限元格式。

设三角形单元节点编码为 i 、 j 、 m ，以逆时针方向编码为正向，否则后面求出的面积 A 为负值。每个节点有两个位移分量如图 2-1 所示，节点位移为

$$\delta^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T$$

节点的坐标分别为 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_m, y_m) 。

在有限单元法中单元的位移模式（也称位移函数和插值函数）一般采用多项式作为近似函数，因为多项式运算简便，并且随着项数的增多，可以逼近任何一段光滑的函数曲线。多项式的选取应由低次到高次。3 节点三角形单元位移模式选取一次多项式

$$\begin{cases} u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ v = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \end{cases} \quad (2-1)$$

单元内的位移是坐标 (x, y) 的线性函数。 $\beta_1 \sim \beta_6$ 是待定系数，称之为广义坐标。6 个广义坐标可由单元的 6 个节点位移来表示。在式 (2-1) 中代入三角形单元各节点的坐标然后解出

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2A} (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) \\ \beta_2 &= \frac{1}{2A} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \beta_3 &= \frac{1}{2A} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \\ \beta_4 &= \frac{1}{2A} (a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m) \\ \beta_5 &= \frac{1}{2A} (b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m) \\ \beta_6 &= \frac{1}{2A} (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

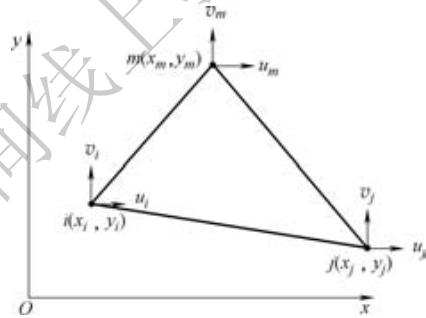


图 2-1 3 节点三角形单元

式中 A 为三角形的面积, 即

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= -x_j + x_m \end{aligned} \right\} (i, j, m) \quad (2-3)$$

式中 (i, j, m) 表示下标轮换, 如 $i \rightarrow j, j \rightarrow m, m \rightarrow i$ 。

将求得的广义坐标代入式 (2-1), 可将单元位移函数表示成节点位移的函数, 即

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

式中

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m) \quad (2-5)$$

N_i, N_j, N_m 称为单元的插值基函数或形函数, 它是坐标 (x, y) 的一次函数。单元上任一点的形函数之和为 1。

式 (2-4) 写为矩阵的形式

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = [\mathbf{I}N_i \quad \mathbf{I}N_j \quad \mathbf{I}N_m] \boldsymbol{\delta}^e \quad (2-6)$$

式中 $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为二阶单位阵。

2. 应变矩阵

确定了单元位移后, 可以很方便地利用几何方程和物理方程求得单元的应变和应力。作为平面问题, 单元内具有 3 个应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ (各符号的意义见附录 A), 用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

将式 (2-4) 代入上式中, 得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^e$$

或

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (2-7)$$

式中 \mathbf{B} 为应变矩阵, 写为分块形式, 即

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m] \quad (2-8)$$

而其子矩阵为

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (2-9)$$

3 节点三角形单元的 \mathbf{B} 是常量矩阵，所以称为常应变单元。在应变梯度较大（也即应力梯度较大）的部位，单元划分应当密集，否则将不能反映应变的真实变化而导致较大的误差。

上述应变中包括与应力有关的应变和与应力无关的应变两部分，无关的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 又称为初应变，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 由温度变化、收缩、晶体生长等因素引起，对工程结构一般只考虑温度应变，无论线性和非线性温度，计算时可近似地采用平均温度，即

$$\bar{T} = \frac{T_i + T_j + T_m - 3T_{\text{ref}}}{3}$$

式中 T_i 、 T_j 、 T_m 分别为节点 i 、 j 、 m 的温度； T_{ref} 为参考温度。

对于平面应变问题，温度 \bar{T} 引起的初始应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \alpha \bar{T} \\ \alpha \bar{T} \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中 α 为线膨胀系数。

由于温度变化在各向同性介质中不引起剪切变形，所以 $\gamma_{xy0} = 0$ 。以后所述问题，除非特别说明，都指各向同性介质。

对平面应力问题，温度 \bar{T} 引起的初始应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1+\mu) \begin{bmatrix} \alpha \bar{T} \\ \alpha \bar{T} \\ 0 \end{bmatrix}$$

当不考虑温度的影响时，当前温度即为参考温度。以后所述问题，除非特别说明，不考虑温度影响。

3. 单元应力

根据物理方程，对平面应力问题，取应变分量

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}$$

由上式解出

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (2-10)$$

式中 \mathbf{D} 为弹性矩阵，取决于弹性常数 E 和 μ 。即

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}\quad (2-11)$$

将式 (2-7) 代入式 (2-10) 得

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}^e\quad (2-12)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{B} = [\mathbf{S}_i \quad \mathbf{S}_j \quad \mathbf{S}_m]\quad (2-13)$$

$$\mathbf{S}_i = \frac{E}{2(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m)$$

式中 \mathbf{S} 为应力矩阵，反映了单元应力与单元节点位移之间的关系。由于单元应力和应变分量为常量，所以单元边界上有应力阶跃，随单元划分变密，突变将减小。

对平面应变问题，有 4 个应力分量： σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 和 σ_z 。取应变分量为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) = 0$$

由应变分量的解出 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} ，弹性矩阵为

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}\quad (2-14)$$

根据物理方程可以求解各应力分量。

4. 单元刚度矩阵

单元节点力为 \mathbf{F}^e ，节点虚位移为 $(\boldsymbol{\delta}^*)^e$ ，节点虚应变为 $(\boldsymbol{\varepsilon}^*)^e$ ，平面单元的厚度为 t 。应

用虚位移原理，得

$$((\delta^*)^e)^T F^e = \iint_A (\varepsilon^*)^T \sigma t dx dy = \iint_A (\varepsilon^*)^T D \varepsilon t dx dy$$

将 $\varepsilon^* = B(\delta^*)^e$ 及 $\varepsilon = B\delta^e$ 代入上式整理，得到

$$F^e = \left(\iint_A B^T DB t dx dy \right) \delta^e$$

可见单元刚度矩阵为

$$K^e = \iint_A B^T DB t dx dy \quad (2-15)$$

对于 3 节点三角形单元，面积为 A ，所取为线性位移模式，单元刚度矩阵为

$$K^e = B^T S t A$$

进一步表示为

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

对平面应力问题有

$$K_{rs} = \frac{Et}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ \mu c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix} \quad (r=i, j, m; s=i, j, m) \quad (2-16)$$

单元刚度矩阵表达单元抵抗变形的能力，其元素值为单位位移所引起的节点力，与普通弹簧的刚度系数具有同样的物理本质。例如子块

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} k_{ij}^{11} & k_{ij}^{12} \\ k_{ij}^{21} & k_{ij}^{22} \end{bmatrix}$$

式中 上标 1 表示 x 方向自由度；2 表示 y 方向自由度；后一上标代表单位位移的方向；前一上标代表单位位移引起的节点力方向。如 k_{ij}^{11} 表示 j 节点产生单位水平位移时在 i 节点引起的水平节点力分量， k_{ij}^{21} 表示 j 节点产生单位水平位移时在 i 节点引起的竖直节点力分量，其余类推。

单元刚度矩阵为对称矩阵。由于单元可有任意的刚体位移，给定的节点力不能唯一地确定节点位移，可知单元刚度矩阵不可求逆，具有奇异性。

5. 等效节点载荷

有限单元法分析只采用节点载荷，作用于单元上的非节点载荷都必须移置为等效节点载荷。可依照静力等效原则，即原载荷与等效节点载荷在虚位移上所做的虚功相等，来求等效节点载荷。

(1) 集中力的移置 设单元 ijm 内坐标为 (x, y) 的任意一点 M 受有集中载荷 $f = [f_x \ f_y]^T$ ，移置为等效节点载荷 $P^e = [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_m \ Y_m]^T$ 。假想单元发生了虚位移，其中， M 点虚位移为 $u^* = N(\delta^*)^e$ ，其中 $(\delta^*)^e$ 为单元节点虚位移。按照静力等效原则有

$$((\delta^*)^e)^T P^e = (u^*)^T f = ((\delta^*)^e)^T N^T f$$

则

$$P^e = N^T f \quad (2-17)$$

(2) 体力的移置。设单元承受有分布体力，单位体积的体力记为 $q = [q_x \ q_y]^T$ ，其等效节点

载荷为

$$\mathbf{P}^e = \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} t dx dy \quad (2-18)$$

(3) 面力的移置。设在单元的某一个边界上作用有分布的面力，单位面积上的面力为 $\mathbf{p} = [p_x \quad p_y]^T$ ，在此边界上取微面积 $t ds$ ，对整个边界面积分，得到

$$\mathbf{P}^e = \int \mathbf{N}^T \mathbf{p} t ds \quad (2-19)$$

【例 2-1】求单元在以下受力情况下的等效节点载荷： y 方向的重力为 G ，图 2-2 所示 ij 边受 x 方向均布力 p ，图 2-3 所示 jm 边受 x 方向线性分布力。

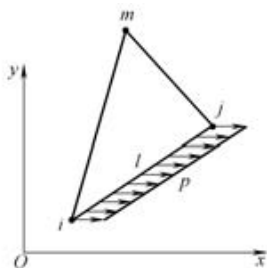


图 2-2 均布力

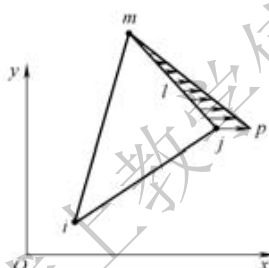


图 2-3 线性分布力

求解说明

利用上述公式求等效节点载荷，当原载荷是分布体力或面力时，进行积分运算是比较烦琐的。但在线性位移模式下，可以按照静力学中力的分解原理直接求出等效节点载荷，上述三种情况等效节点载荷分别为

$$\mathbf{P}^e = -\frac{G}{3} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{P}^e = ptl \left[\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

$$\mathbf{P}^e = \frac{ptl}{2} \left[0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right]^T$$

6. 整体分析

结构的整体分析就是将离散后的所有单元通过节点连接成原结构物进行分析，分析过程是将所有单元的单元刚度方程组集成总体刚度方程，引进边界条件后求解整体节点位移向量。

总体刚度方程实际上就是所有节点的平衡方程，由单元刚度方程组集成总体刚度方程应满足以下两个原则：

(1) 各单元在公共节点上协调地彼此连接，即在公共节点处具有相同的位移。由于基本未知量为整体节点位移向量，这一点已经得到满足。

(2) 结构的各节点离散出来后应满足平衡条件，也就是说，环绕某一节点的所有单元作用于该节点的节点力之和应与该节点的节点载荷平衡。

每一节点统一使用整体节点编号，如图 2-4 所示。第 4 单元节点编号 i, j, m 统一依次改为 8、7、5。确定各单

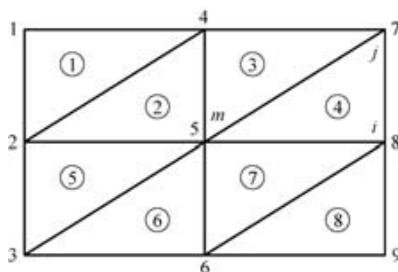


图 2-4 节点与单元编号

元的大域变换矩阵，如第 4 单元为

$$\mathbf{G}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式中 \mathbf{I} 为 2×2 阶单位矩阵。

求出各单元刚度矩阵，利用大域变换法求出结构整体刚度矩阵 \mathbf{K} ，引入边界条件，得到结构的节点平衡方程为

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{P} \quad (2-20)$$

进而，求解节点位移、单元应力和应变。

【例 2-2】如图 2-5 所示，一悬臂梁，自由端受合力为 P 的均布力作用，梁厚 $t=1$ ， $\mu=1/3$ ，求节点位移。

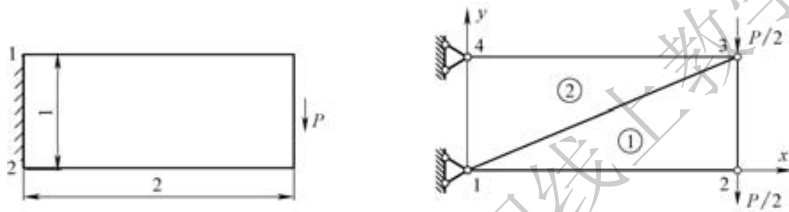


图 2-5 结构与离散

求解说明

结构为平面应力问题，划分为 2 个三角形单元①、②，有 4 个节点 1、2、3、4，坐标分别为 $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(0, 1)$ 。单元①、②节点顺序分别取 3、1、2 和 1、3、4，刚度矩阵完全一样。

对单元①： $b_i=0$ ， $b_j=-1$ ， $b_m=1$ ， $c_i=2$ ， $c_j=0$ ， $c_m=-2$ 。

对单元②： $b_i=0$ ， $b_j=1$ ， $b_m=-1$ ， $c_i=-2$ ， $c_j=0$ ， $c_m=2$ 。

单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}^2 = \frac{3E}{32} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 12 & -2 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -3 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & -12 & 2 & -1 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

利用大域变换法求出整体刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \frac{3E}{32} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 & 2 & 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & -4 & 0 & 2 & -12 \\ -3 & 2 & 7 & -4 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 13 & 2 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 7 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & -12 & 0 & 13 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & -3 & 2 & 7 & -4 \\ 2 & -12 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

节点载荷向量为

$$\mathbf{P} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -P/2 \quad 0 \quad -P/2 \quad 0 \quad 0]^T$$

位移向量为

$$\boldsymbol{\delta} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T$$

由结构平衡方程求得节点位移为

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{P}{E} [0 \quad 0 \quad -1.88 \quad -8.99 \quad 1.50 \quad -8.42 \quad 0 \quad 0]^T$$

7. 平面问题高次单元

如前所述, 3 节点三角形单元因其位移模式是线性函数, 应变与应力在单元内都是常量, 而弹性体实际的应力场是随坐标而变化的。因此, 这种单元在各单元间边界上应力有突变, 存在一定误差。为了更好地逼近实际的应变与应力状态, 提高单元本身的计算精度, 可以增加单元节点而采用更高阶次的位移模式, 称为平面问题高次单元。如 6 节点三角形单元、矩形单元等。这里只介绍 6 节点三角形单元与矩形单元的位移模式, 其他单元的位移模式和具体求解步骤与 3 节点三角形单元类似, 且应用较少, 不再赘述。

6 节点三角形单元如图 2-6 所示, 在三角形单元各边中点处增加一个节点, 则每个单元有 6 个节点, 共有 12 个自由度。位移模式的项数应与自由度数相当, 阶次应选得对称以保证几何各向同性。其位移模式应取完全二次多项式, 即

$$\left. \begin{aligned} u &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \\ v &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{10} x^2 + \beta_{11} xy + \beta_{12} y^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

将节点的坐标和位移代入即可求出广义坐标。

4 节点矩形单元如图 2-7 所示, 共有 8 个自由度, 取位移模式为

$$\left. \begin{aligned} u &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy \\ v &= \beta_5 + \beta_6 x + \beta_7 y + \beta_8 xy \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

将节点的坐标和位移代入即可求出广义坐标。

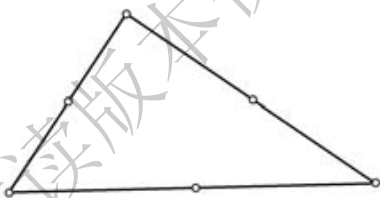


图 2-6 6 节点三角形单元

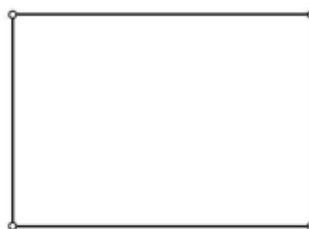


图 2-7 4 节点矩形单元

2.1.2 轴对称问题有限单元法

如果弹性体的几何形状、约束条件及载荷都对称于某一轴, 例如 z 轴, 则所有的位移、应变及应力也对称于此轴。这种问题称为轴对称应力问题。在竖井、压力容器及机械制造中, 经常遇到轴对称应力问题。用有限单元法分析轴对称问题时, 须将结构离散成有限个圆环单元。圆环单元的截面常用三角形或矩形, 也可以是其他形式。这种环形单元之间由圆环形铰相连, 称为结圆。轴对称问题的单元虽然是圆环体, 与平面问题的平板单元不同, 但由于对称性, 可以任取一个子午面进行分析。圆环形单元与子午面上相截生成网格, 可以采用平面问题有限元分析相似的

方法分析。不同之处是：单元为圆环体，单元之间由结圆铰接，节点力为结圆上的均布力，单元边界为回转面。

对于轴对称问题，采用圆柱坐标 (r, θ, z) 较为方便。如果以弹性体的对称轴作为 z 轴，所有应力、应变和位移都与 θ 无关，只是 r 和 z 的函数。任一点只有两个位移分量，即沿 r 方向的径向位移 u 和沿 z 方向的轴向位移 w 。由于对称， θ 方向的环向位移等于零。

在轴对称问题中，采用的单元是一些圆环。这些圆环和 rz 平面正交的截面通常取为三角形，如图 2-8 所示的 ijm （也可以取为其他形状）。各单元之间用圆环形的铰链互相连接，每一个铰与 rz 平面的交点称为节点，如 i, j, m 等。各单元在 rz 平面上形成三角形网格，类似于在平面问题中各三角形单元在 xy 平面上所形成的网格。但是在轴对称问题中，每个单元的体积都是一个圆环的体积，这点与平面问题是不同的。

假定物体的形状、约束条件及载荷都是轴对称的，这时只需分析一个截面。

1. 位移函数

取出一个环形单元的截面 ijm ，如图 2-9 所示，各节点位移为

$$\delta_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m)$$

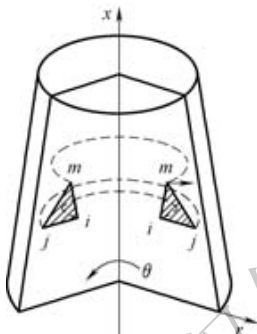


图 2-8 轴对称弹性体三角形单元

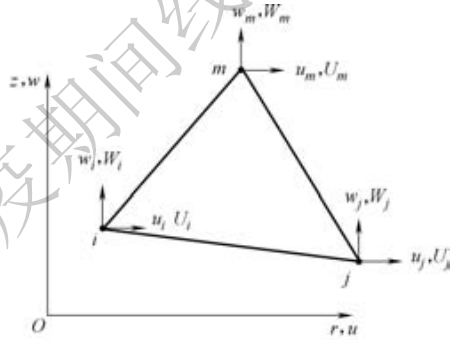


图 2-9 轴对称三角形单元节点力与节点位移

仿照平面问题，位移的类似表达式为

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ w &= N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

式中

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z) \quad (i, j, m)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix}$$

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j, b_i = z_j - z_m, c_i = -r_j + r_m \quad (i, j, m)$$

将式 (2-23) 写为矩阵的形式，即

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N} \delta^e = [N_i \quad N_j \quad N_m] \delta^e \quad (2-24)$$

式中, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是二阶单位矩阵。

2. 单元应变

轴对称应力问题, 每点具有 4 个应变分量, 如图 2-10 所示, 沿 r 方向的正应变 ε_r , 称为径向正应变; 沿 θ 方向的正应变 ε_θ , 称为环向正应变; 沿 z 方向的正应变 ε_z , 称为轴向正应变; 在 rz 平面中的切应变为 γ_{rz} 。由于轴对称, 其余两个切应变分量 $\gamma_{r\theta}$ 及 $\gamma_{\theta z}$ 都等于零。根据几何关系, 可推知应变与位移之间符合下列关系:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

将位移函数式 (2-23) 代入式 (2-25), 得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m] \boldsymbol{\delta}^e \quad (2-26)$$

式中

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ h_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

$$h_i = \frac{a_i}{r} + b_i + c_i \frac{z}{r}$$

环向应变 ε_θ 中包含了坐标 r 和 z , 不是常量, 但其他应变分量都是常量。

3. 单元应力

在轴对称问题中, 任一点具有 4 个应力分量, 即径向正应力 σ_r 、环向正应力 σ_θ 、轴向正应力 σ_z 及切应力 τ_{rz} 。

应力与应变之间的关系, 可用矩阵写成

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}]^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-27)$$

式中 \mathbf{D} 为弹性矩阵, 对各向同性体, 有

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

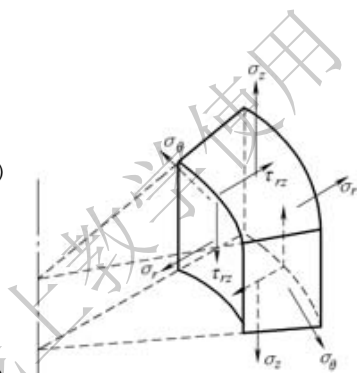


图 2-10 轴对称弹性体的应力

4. 单元刚度矩阵

由虚位移方程，沿着整个圆环求体积分，可得

$$\mathbf{K}^e = 2\pi \iint_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz \quad (2-28)$$

5. 节点载荷

对于轴对称问题，节点载荷是作用在整圈圆环形铰上的。例如，设节点的半径为 r ，单位长度的铰上作用的载荷为 \bar{R} （径向）和 \bar{Z} （轴向），计算中采用的节点载荷应为径向 $2\pi r \bar{R}$ ，轴向 $2\pi r \bar{Z}$ 。

设单位体积内作用的体积力（重力、离心力等）为 $\mathbf{q} = [q_r, q_z]^T$ ，节点载荷为

$$\mathbf{P}_q^e = 2\pi \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{q} r dr dz \quad (2-29)$$

2.1.3 空间问题有限元法

弹性力学的平面问题和轴对称问题是空间问题的特例，是在某种条件下的简易解法。在实际工程中，有些结构由于形体复杂，难以简化为平面问题或轴对称问题，必须按空间问题求解。在空间问题中，最简单的单元是具有 4 个角点的四面体，如图 2-11 所示。从这一节开始，先介绍常应变四面体单元，然后介绍高次四面体单元及六面体单元等。下面首先以四面体单元为例介绍空间问题的有限元法求解步骤。

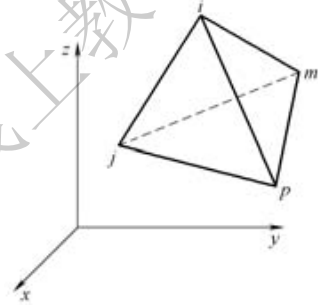


图 2-11 四面体单元

1. 位移模式

如图 2-11 所示的一个四面体单元，以 4 个角点 i 、 j 、 m 、 p 为节点，这是最早提出的，也是最简单的空间单元。

每个节点有三个位移分量

$$\boldsymbol{\delta}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m, p) \quad (2-30)$$

每个单元共有 12 个节点位移分量，表示为向量

$$\boldsymbol{\delta}^e = [\boldsymbol{\delta}_i \quad \boldsymbol{\delta}_j \quad \boldsymbol{\delta}_m \quad \boldsymbol{\delta}_p]^T \quad (2-31)$$

假定单元内任一点的位移分量是坐标的线性函数

$$\left. \begin{aligned} u &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z \\ v &= \beta_5 + \beta_6 x + \beta_7 y + \beta_8 z \\ w &= \beta_9 + \beta_{10} x + \beta_{11} y + \beta_{12} z \end{aligned} \right\} \quad (2-32)$$

式中 广义坐标 β_1 、 β_5 、 β_9 代表刚体移动； β_2 、 β_7 、 β_{12} 代表常量正应变；其余 6 个系数反映了常量切应变和刚体转动。

将各节点的坐标和位移代入式 (2-32)，求出各广义坐标，进而得到四面体单元上任一点的位移为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = [\mathbf{N}_i \quad \mathbf{N}_j \quad \mathbf{N}_m \quad \mathbf{N}_p] \boldsymbol{\delta}^e \quad (2-33)$$

式中 \mathbf{I} 为三阶单位矩阵。形函数为

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad (i, j, m, p)$$

V 为四面体 $ijmp$ 的体积

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (i, j, m, p)$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (i, j, m, p), \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (i, j, m, p)$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \quad (i, j, m, p), \quad d_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \quad (i, j, m, p)$$

为了使四面体的体积 V 不为负值，单元节点的标号 i, j, m, p 必须依照一定的顺序，在右手坐标系中，当按照 $i \rightarrow j \rightarrow m$ 的方向转动时，右手螺旋应向 p 的方向前进。

由于位移函数是线性的，在相邻单元的接触面上，位移显然是连续的（单元协调）。

2. 单元应变

在空间应力问题中，每个点具有 6 个应变分量

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right]^T$$

将式 (2-33) 代入上式，得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e = [\mathbf{B}_i \quad -\mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m \quad -\mathbf{B}_p] \boldsymbol{\delta}^e \quad (2-34)$$

式中 应变矩阵的子阵为

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m, p)$$

由于矩阵 \mathbf{B} 中的元素都是常量，单元应变分量也都是常量。

3. 单元应力

单元应力可用节点位移表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{S} \boldsymbol{\delta}^e \quad (2-35)$$

式中 应力矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{D} \mathbf{B}$ ，弹性矩阵 \mathbf{D} 为

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 对 & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 称 & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

由于应变是常量，应力也是常量。

4. 单元刚度矩阵

由虚位移原理，可以得到单元刚度矩阵，即

$$K^e = B^T D B V \quad (2-36)$$

5. 节点载荷

通过与平面问题中同样地推导得到类似的节点载荷计算公式。

(1) 集中力 $f = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T$ 的移置为

$$P^c = N^T f \quad (2-37)$$

(2) 体力 $q = [q_x \quad q_y \quad q_z]^T$ 的移置为

$$P^c = \iiint N^T q dV \quad (2-38)$$

(3) 面力 $p = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$ 的移置为

$$P^c = \iint N^T p dA \quad (2-39)$$

以上是普遍适用的计算式。

6. 高次四面体单元及六面体单元

实际工程结构中的应力场，往往是随着坐标而急剧变化的，常应变四面体单元中的应力分量都是常量，难以适应急剧变化的应力场，为了保证必要的计算精度，必须采用密集的计算网格，这样一来，节点数量将很多，方程组十分庞大。如果采用高次位移模式，单元中的应力是变化的，就可以用较少的单元、较少的自由度得到要求的计算精度，从而降低方程组的规模。当然，高次单元的刚度矩阵比较复杂，形成刚度矩阵要花费较多的计算时间。但在保持同样计算精度的条件下，采用高次单元，在总的计算时间上还是节省的。10节点四面体单元、8节点六面体单元如图 2-12 与图 2-13 所示。还有 20 节点四面体单元、20 节点六面体单元等，其计算分析步骤同前述类似。

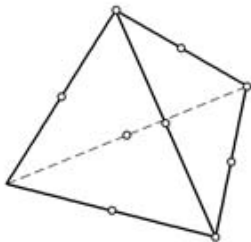


图 2-12 10 节点四面体单元

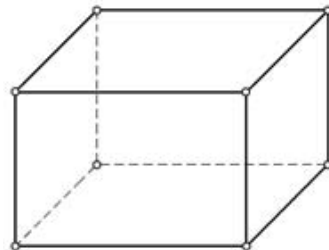


图 2-13 8 节点六面体单元

2.1.4 等参数有限元方法

单元插值函数的方次随单元节点数目增加而增加，其代数精确度也随之提高，用它们构造有限元模型时，用较少的单元就能获得较高精度的解答。但前面给出的高精度单元的几何形状多很规则，对复杂边界的适应性差，不能期望用较少的形状规则的单元来离散复杂几何形状的结构。那么，能否构造出本身形状任意、边界适应性强的单元呢？构造这样的单元存在两个方面的困难：一是难以构造出满足连续性条件的单元插值函数；二是单元分析中出现的积分难以确定积分限。于是希望另辟蹊径，利用形状规则的高次单元通过某种演化来实现这一目标。

数学上，可以通过解析函数给出的变换关系，将一个坐标系下形状复杂的几何边界映射到另一个坐标系下，生成形状简单的几何边界，反过来也一样。那么，将满足收敛条件的形状规则的高精度单元作为基本单元，定义于局部坐标系（取自然坐标系），通过坐标变换映射到总体坐标系（取笛卡儿坐标系）中生成几何边界任意的单元，作为实际单元，只要变换使实际单元与基本单元之间的点一一对应，即满足坐标变换的相容性，实际单元同样满足收敛条件。这样构造的单元具有双重特性：作为实际单元，其几何特性、受力情况、力学性能都来自真实结构，充分反映了它的属性；作为基本单元，其形状规则，便于计算与分析。

有限单元法中最普遍采用的变换方法是等参数变换，即坐标变换和单元内的场函数采用相同数目的节点参数及相同的插值函数，等参数变换的单元称之为等参数单元。借助于等参数单元可以对一般的任意几何形状的工程问题和物理问题方便地进行有限元离散，因此，等参数单元的提出为有限单元法成为现代工程实际领域最有效的数值分析方法迈出了极为重要的一步。

由于等参数变换的采用使得等参数单元的各种特性矩阵计算在规则域内进行，因此不管各积分形式的矩阵中的被积函数如何复杂，都可以方便地采用标准化的数值积分方法计算，从而使各类不同工程实际问题的有限元分析纳入了统一的通用化程序的轨道。现在的有限元分析大多采用等参数单元。

1. 等参数变换

为将局部坐标中几何形状规则的单元转换成总体坐标中几何形状复杂的单元，整体坐标 (x, y, z) 与局部坐标 (ξ, η, ζ) 之间使用坐标变换，即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \left(\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \right)$$

为建立前面所述的变换，最方便的方法是将坐标变换式也表示成插值函数的形式，即

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i, y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i, z = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \quad (2-40)$$

式中 n 为用以进行坐标变换的单元节点数； x_i, y_i, z_i 为这些节点在总体坐标内的坐标值； N_i 也称为形状函数，实际上是用局部坐标表示的插值基函数。

通过式 (2-40) 建立起两个坐标系之间的变换，从而将局部坐标内的形状规则的单元（基本单元）变换为笛卡儿坐标内的形状扭曲的单元（实际单元），前者为母单元，后者为子单元。

坐标变换关系式 (2-40) 和函数的插值表示式

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i, v = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i, w = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \quad (2-41)$$

是相同的，由于坐标变换和函数插值采用相同的节点，并且采用相同的插值函数，故称这种变换为等参数变换。各种单元的插值函数可查阅有关资料。图 2-14 的等参数变换为

$$x = \frac{x_1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{x_2}{4}(1+\xi)(1-\eta) + \frac{x_3}{4}(1-\xi)(1+\eta) + \frac{x_4}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$y = \frac{y_1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{y_2}{4}(1+\xi)(1-\eta) + \frac{y_3}{4}(1-\xi)(1+\eta) + \frac{y_4}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

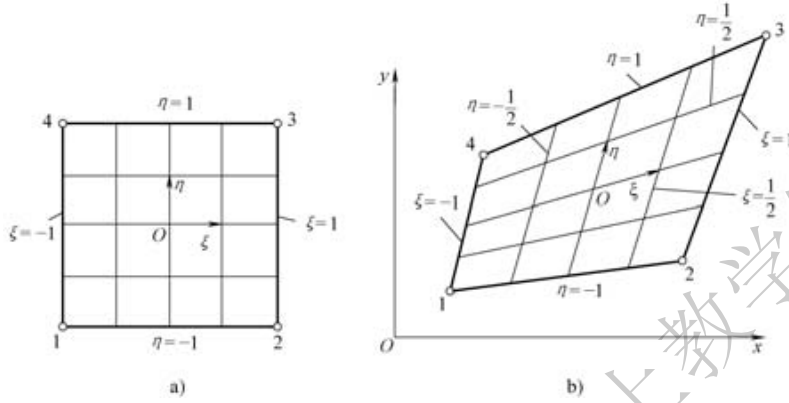


图 2-14 二维线性单元的变换

a) 母单元 b) 子单元

2. 单元矩阵的变换

有限元分析中，为建立求解方程，需要进行各个单元体积内和面积上的积分，来描述在 x 、 y 、 z 坐标系下出现的物理量，它们的一般形式可表示为

$$\iiint_{V_e} G(x, y, z) dx dy dz \quad (2-42)$$

$$\iint_{S_e} g(x, y, z) dS \quad (2-43)$$

但实际单元是由局部坐标下的基本单元映射生成的，位移模式 (2-41) 是局部坐标的函数，单元列式的推导是在局部坐标 ξ 、 η 、 ζ 下进行的。由于从坐标变换式 (2-40) 不能获得 $\xi = \xi(x, y, z)$ 、 $\eta = \eta(x, y, z)$ 、 $\zeta = \zeta(x, y, z)$ 的显式， $G(x, y, z)$ 与 $g(x, y, z)$ 作为 x 、 y 、 z 的函数也就只能是某种隐含的关系，不存在显式表达，所以只能在局部坐标 ξ 、 η 、 ζ 下完成前面的积分。为此需要建立两个坐标系内体积微元、面积微元之间的变换关系。而被积函数 G 和 g 中还包含着对于总体坐标 x 、 y 、 z 的导数，因此还要建立两个坐标系内导数之间的变换关系。

(1) 导数之间的变换关系。按照通常的偏微分规则，函数 N_i 对 ξ 、 η 、 ζ 的偏导数可表示为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2-44)$$

式中 \mathbf{J} 称为 Jacobi 矩阵，可记作 $\partial(x, y, z) / \partial(\xi, \eta, \zeta)$ ，利用式 (2-40)， \mathbf{J} 可以显式地表示为局部坐标的函数，即

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\xi, \eta, \zeta)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}$$

这样一来, N_i 对于 x 、 y 、 z 的偏导数可用局部坐标显式地表示为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

式中 \mathbf{J}^{-1} 为 \mathbf{J} 的逆矩阵。

(2) 体积微元、面积微元的变换。d ξ 、d η 、d ζ 在笛卡儿坐标系内所形成的体积微元为

$$dV = d\xi \cdot (d\eta \times d\zeta) \quad (2-46)$$

而

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \mathbf{k} \\ d\eta &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\eta \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\eta \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\eta \mathbf{k} \\ d\zeta &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\zeta \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\zeta \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\zeta \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-47)$$

式中 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 为笛卡儿坐标 x 、 y 和 z 方向的单位向量。将式 (2-47) 代入式 (2-46), 得到

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (2-48)$$

对于二维情况, 以上各式将相应蜕化, 这时 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

两个坐标之间的偏导数关系为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

$d\xi$ 和 $d\eta$ 在笛卡儿坐标内形成的面积微元为

$$dA = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2-51)$$

在 $\xi=c$ 的曲线上, $d\eta$ 在笛卡儿坐标内的线段微元的长度为

$$ds = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]} d\eta \quad (2-52)$$

2.1.5 单元与整体分析

1. 能量原理

有限单元法的核心是建立单元刚度矩阵, 有了单元刚度矩阵, 加以适当组合, 可以得到平衡方程组, 剩下的就是一些代数运算了。在弹性力学平面问题计算中, 我们是用直观方法建立单元刚度矩阵的, 其优点是易于理解, 并便于初学者建立清晰的力学概念。但这种直观方法也是有缺点的: 一方面, 对于比较复杂的单元, 依靠它建立单元刚度矩阵是有困难的; 另一方面, 它也不能给出关于收敛性的证明。把能量原理应用于有限单元法, 就可以克服这些缺点。能量原理为建立有限单元法基本公式提供了强有力的工具。在各种能量原理中, 虚位移原理和最小势能原理应用最为方便, 因而得到了广泛的采用。

(1) 虚位移原理 所谓虚位移可以是任何无限小的位移, 它在结构内部必须是连续的, 在结构的边界上必须满足运动学边界条件。例如对于悬臂梁来说, 在固定端处, 虚位移及其斜率必须等于零。

考虑如图 2-15 所示的物体, 它受到外力 F_1 、 F_2 、 \dots 的作用, 即

$$\mathbf{F} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \dots]^T$$

在这些外力作用下, 物体的应力为

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

现在假设物体发生了虚位移, 在外力作用处与各个外力相应方向的虚位移为

$$\boldsymbol{\delta}^* = [\delta_1^* \quad \delta_2^* \quad \delta_3^* \quad \dots]^T$$

上述虚位移所产生的虚应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = [\varepsilon_x^* \quad \varepsilon_y^* \quad \varepsilon_z^* \quad \gamma_{xy}^* \quad \gamma_{yz}^* \quad \gamma_{zx}^*]^T$$

在产生虚位移时, 外力已作用于物体, 而且在虚位移过程中, 外力保持不变。因此, 外力在虚位移上所做的虚功为

$$\delta V = (\boldsymbol{\delta}^*)^T \mathbf{F} \quad (2-53)$$

整个物体的虚应变能为

$$\delta U = \iiint (\boldsymbol{\varepsilon}^*)^T \boldsymbol{\sigma} dx dy dz \quad (2-54)$$

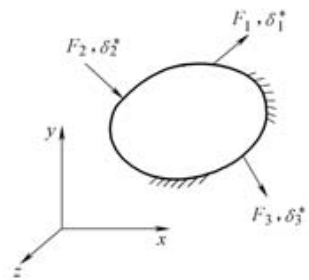


图 2-15 固体的边界条件

虚位移原理表明，如果在虚位移发生之前，物体处于平衡状态，那么在虚位移发生时，外力所做虚功等于物体的虚应变能，即

$$\delta V = \delta U \quad (2-55)$$

虚位移原理不但适用于线性材料，也适用于非线性材料。

(2) 最小势能原理 物体的势能 Π_p 定义为物体的应变能 U 与外力势 V 之差，即

$$\Pi_p = U - V \quad (2-56)$$

式中 应变能 U 为

$$U = \iiint \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} dx dy dz = \iiint \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dx dy dz$$

外力势为

$$V = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\delta} + \iiint \mathbf{r}^T \mathbf{q} dx dy dz + \int_{S_\sigma} \mathbf{r}_b^T \bar{\mathbf{p}} ds$$

式中 右端第1项为集中力 \mathbf{F} 的势；第2项为体积力 \mathbf{q} 的势；第3项为面力 $\bar{\mathbf{p}}$ 的势； S_σ 为面力作用的表面； \mathbf{r}_b 为表面 S_σ 上的位移。

最小势能原理可叙述如下：在所有满足边界条件的协调（连续）位移中，那些满足平衡条件的位移使物体势能取驻值，即

$$\delta \Pi_p = \delta U - \delta V = 0 \quad (2-57)$$

对于线性弹性体，势能取最小值。

最小势能原理可以用虚位移原理证明。

2. 用能量原理求单元刚度矩阵和节点载荷

利用最小势能原理，可以求出单元刚度矩阵及节点载荷。对空间问题，设一个单元，在各节点上作用着节点力 \mathbf{F}^e ，单元节点位移为 $\boldsymbol{\delta}^e$ ，单元应变为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e$ ，物体应变能为

$$U = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\delta}^e)^T \left(\iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy dz \right) \boldsymbol{\delta}^e$$

即

$$U = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e$$

式中 \mathbf{K}^e 为单元刚度矩阵，即

$$\mathbf{K}^e = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy dz \quad (2-58)$$

单元节点力的外力势为

$$V = (\boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{F}^e$$

则单元的势能为

$$\Pi_p = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e - (\boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{F}^e$$

由最小势能原理， $\delta \Pi_p = 0$ ，所以有

$$\frac{\delta \Pi_p}{\delta \boldsymbol{\delta}^e} = 0$$

则节点力为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (2-59)$$

从物理上考虑，应变能必须是正量，而节点位移又是任意的，所以单元刚度矩阵是正定的。

由此可以推断势能的二阶变分是非负的。既然势能的一阶变分等于零，二阶变分又非负，从而可以断定势能取最小值。

把 $\mathbf{r} = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}^e$ 代入外力势的表达式中，得到体力 \mathbf{q} 与面力 $\{\bar{\mathbf{p}}\}$ 的势为

$$V = (\boldsymbol{\delta}^e)^T \iiint \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx dy dz + (\boldsymbol{\delta}^e)^T \int_s \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} ds$$

所以单元的势能为

$$\Pi_p = U - V = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^e - (\boldsymbol{\delta}^e)^T \iiint \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx dy dz - (\boldsymbol{\delta}^e)^T \int_s \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} ds$$

根据最小势能原理得到

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{P}_q^e + \mathbf{P}_p^e$$

$$\mathbf{P}_q^e = \iiint \mathbf{N}^T \mathbf{q} dx dy dz \quad (2-60)$$

$$\mathbf{P}_p^e = \int_s \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} ds \quad (2-61)$$

以上各式与由虚位移原理推得的结论一致。

3. 用能量原理求总体平衡方程

结构整体刚度矩阵为 \mathbf{K} ，节点位移为 $\boldsymbol{\delta}$ ，结构内能为

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (2-62)$$

\mathbf{P} 为作用在节点上的载荷，载荷的势为

$$V = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{P} \quad (2-63)$$

结构的势能为

$$\Pi_p = U - V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{P}$$

由最小势能原理，势能取驻值，即

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \boldsymbol{\delta}} = 0$$

则得到

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{P} \quad (2-64)$$

该方程与由节点平衡方程得到的方程组一致，但结构复杂时或采用高次单元时，利用最小势能原理建立方程组无特殊困难。

2.2 结构动力学问题有限元方法

动力学问题在国民经济和科学技术的发展中有着广泛的应用领域。最常遇到的是结构动力学问题，它有两类研究对象：一类是在运动状态下工作的机械或结构，例如高速旋转的电动机、汽轮机、离心压缩机，往复运动的内燃机、冲压机床，以及高速运行的车辆、飞行器等，它们承受着本身惯性及与周围介质或结构相互作用的动力载荷。如何保证它们运行的平稳性及结构的安全性，是极为重要的研究课题。另一类是承受动力载荷作用的工程结构，例如建于地面的高层建筑和厂房，石化厂的反应塔和管道，核电站的安全壳和热交换器，近海工程的海洋石油平台等，它们可能承受强风、水流、地震以及波浪等各种动力载荷的作用。这些结构的破裂、倾覆和垮塌等破坏事故的发生，将给人民的生命财产造成巨大的损失。正确分析和设计这类结构，在理论和实

际上也都是十分有意义的课题。

动力学研究的另一重要领域是波在介质中的传播问题。它是研究短暂作用于介质边界或内部的载荷所引起的位移和速度的变化，如何在介质中向周围传播，以及在界面上如何反射、折射等的规律。它的研究在结构的抗震设计、人工地震勘探、无损探伤等领域都有广泛的应用背景，因此也是近 20 几年一直备受工程和科技界密切关注的课题。

现在应用有限单元法和高速电子计算机，已经可以比较正确地进行各种复杂结构的动力计算，本节将阐明如何应用有限单元法进行动力分析。

2.2.1 运动方程

结构离散化以后，在运动状态中各节点的动力平衡方程为

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_d + \mathbf{P}(t) = \mathbf{F}_e \quad (2-65)$$

式中 \mathbf{F}_i 、 \mathbf{F}_d 、 $\mathbf{P}(t)$ 分别为惯性力、阻尼力和动力载荷，均为向量； \mathbf{F}_e 为弹性力。

弹性力向量可用节点位移 δ 和刚度矩阵 \mathbf{K} 表示为

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}\delta$$

式中 刚度矩阵 \mathbf{K} 的元素 K_{ij} 为节点 j 的单位位移在节点 i 引起的弹性力。

根据达朗贝尔原理，可利用质量矩阵 \mathbf{M} 和节点加速度 $\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$ 表示惯性力为

$$\mathbf{F}_i = -\mathbf{M} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

式中 质量矩阵的元素 M_{ij} 为节点 j 的单位加速度在节点 i 引起的惯性力。

设结构具有粘滞阻尼，可用阻尼矩阵 \mathbf{C} 和节点速度 $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ 表示阻尼力为

$$\mathbf{F}_d = -\mathbf{C} \frac{\partial \delta}{\partial t}$$

式中 阻尼矩阵的元素 C_{ij} 为节点 j 的单位速度在节点 i 引起的阻尼力。

将各力代入式 (2-65)，得到运动方程为

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{K}\delta = \mathbf{P}(t) \quad (2-66)$$

记

$$\dot{\delta} = \frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad \ddot{\delta} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

则运动方程可写为

$$\mathbf{M} \ddot{\delta} + \mathbf{C}\dot{\delta} + \mathbf{K}\delta = \mathbf{P}(t) \quad (2-67)$$

在地震时，设地面加速度为 a ，结构相对于地面的加速度为 $\ddot{\delta}$ ，结构各节点的实际加速度等于 $a + \ddot{\delta}$ ，在计算惯性力时须用它代替式 (2-67) 中的 $\ddot{\delta}$ 。至于弹性力和阻尼力，则分别取决于结构的应变和应变速率，即取决于位移 δ 和速度 $\dot{\delta}$ ，与地面加速度无关。

2.2.2 质量矩阵

下面用 m 表示单元质量矩阵， \mathbf{M} 表示整体质量矩阵。求出单元质量矩阵后，进行适当的组合即可得到整体质量矩阵。组合方法与由单元刚度矩阵求整体刚度矩阵时相似。

在动力计算中可采用两种质量矩阵，即协调质量矩阵和集中质量矩阵。

1. 协调质量矩阵

从运动的结构中取出一个微小部分，根据达朗贝尔原理，在它的单位体积上作用的惯性力为

$$p_i = -\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$$

式中 ρ 为材料的密度。

在对结构进行离散化以后，取出一个单元，并采用如下形式的位移函数

$$r = N\delta^e$$

则

$$p_i = -\rho N \frac{\partial^2 \delta^e}{\partial t^2}$$

再利用载荷移置的一般公式求得作用于单元节点上的惯性力为

$$F_i^e = \iiint N^T p_i dV = - \iiint N^T \rho N dV \frac{\partial^2 \delta^e}{\partial t^2}$$

即

$$F_i^e = -\tilde{m} \ddot{\delta}^e$$

可见，单元质量矩阵为

$$m = \iiint N^T \rho N dV \quad (2-68)$$

如此计算单元质量矩阵，单元的动能和位能是互相协调的，因此叫作协调质量矩阵。

2. 集中质量矩阵

假定单元的质量集中在它的节点上，质量的平移和转动可同样处理。这样得到的质量矩阵是对角线矩阵。

单元集中质量矩阵定义为

$$m = \iiint \rho \varphi^T \varphi dV \quad (2-69)$$

式中 φ 为函数 φ_i 的矩阵， φ_i 在分配给节点 i 的区域内取 1，在域外取 0。

由于分配给各节点的区域不能交错，所以由式 (2-69) 计算的质量矩阵是对角线矩阵。

3. 平面等应变三角形单元集中质量矩阵与协调质量矩阵

设单元自重为 W ，将它 3 等分，分配给每一节点，得到单元集中质量矩阵为

$$m = \frac{W}{3g} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

单元协调质量矩阵为

$$m = \frac{W}{3g} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2-71)$$

在单元数目相同的条件下，两种质量矩阵给出的计算精度是差不多的。集中质量矩阵不但本身易于计算，而且由于它是对角线矩阵，可使动力计算简化很多。对于某些问题，如梁、板、壳等。由于可省去转动惯性项，运动方程的自由度数量可显著减少。当采用高次单元时，推导集中质量矩阵是困难的。另外，只要离散化时保持了单元之间的连续性，由协调质量矩阵算得的频率代表结构真实自振频率的上限。

2.2.3 阻尼矩阵

如前所述，结构的质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 是由单元质量矩阵 m 和单元刚度矩阵 K^e 经过集合而建立起来的。相对来说，阻尼问题比较复杂，结构的阻尼矩阵 C 不是由单元阻尼矩阵经过集合而得到的，而是根据已有的实测资料，由振动过程中结构整体的能量消耗来决定阻尼矩阵的近似值。

1. 单自由度体系的阻尼

单自由度体系的自由振动方程为

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + k\delta = 0$$

式中 m 为质量； c 为阻尼系数； k 为刚度系数； δ 为变位。

上式两边除以 m 后得到

$$\ddot{\delta} + 2\zeta\omega\dot{\delta} + \omega^2\delta = 0$$

式中 $\omega = \sqrt{k/m}$ ； $\zeta = c/(2m\omega)$ ， ζ 称为阻尼比； ω 为体系的自振频率（角频率）。

设初始条件为：当 $t=0$ 时， $\delta = \delta_0$ ， $\dot{\delta} = v_0$ ，符合这些初始条件的解为

$$\delta = \exp(-\zeta\omega t) \left(\delta_0 \cos\omega_d t + \frac{v_0 + \zeta\omega\delta_0}{\omega_d} \sin\omega_d t \right) \quad (2-72)$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1-\zeta^2}$$

体系的自振频率为 ω_d ，其振幅随着时间而逐渐衰减。

根据实测资料，大多数结构的阻尼比都是很小的数，较多为 $\zeta = 0.01 \sim 0.10$ ，一般都小于 0.20。可见，阻尼对自振频率的影响是很小的，通常可取 $\omega_d = \omega$ 。

2. 多自由度体系的阻尼

如果假定阻尼力正比于质点运动速度，从运动的结构中取出一微小部分，在它的单位体积上

作用的阻尼力为

$$\mathbf{p}_d = -\alpha\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} = -\alpha\rho N \dot{\boldsymbol{\delta}}^e$$

式中 α 为比例常数； ρ 为材料密度； N 为形函数。

利用载荷移置的一般公式求得作用于单元 e 的节点上的阻尼力为

$$\mathbf{F}_d^e = \int \mathbf{N}^T \mathbf{p}_d dV = -\alpha \int \mathbf{N}^T \rho N dV \dot{\boldsymbol{\delta}}^e$$

即

$$\mathbf{F}_d^e = -\mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\delta}}^e$$

而

$$\mathbf{C} = \alpha \int \mathbf{N}^T \rho N dV = \alpha \mathbf{m} \quad (2-73)$$

可见，此时单元阻尼矩阵正比于单元质量矩阵。如果假定阻尼力正比于应变速度，则阻尼应力可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_d = -\beta \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} = \beta \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\delta}}^e$$

所以作用于单元 e 的节点上的阻尼力为

$$\mathbf{F}_d^e = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_d dV = -\beta \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \dot{\boldsymbol{\delta}}^e = -\mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\delta}}^e$$

式中

$$\mathbf{C} = \beta \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \dot{\boldsymbol{\delta}}^e = \beta \mathbf{K}^e \quad (2-74)$$

可见，此时单元阻尼矩阵正比于单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 。

前面已经说过，通常是根据实测资料，由振动过程中结构整体的能量消耗来决定阻尼的近似值，因此不是计算单元阻尼矩阵，而直接计算结构的整体阻尼矩阵 \mathbf{C} 。一般采用如下的线性关系，并称为瑞利 (Rayleigh) 阻尼，即

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2-75)$$

式中 系数 α 和 β 根据实测资料决定。

现在说明如何计算 α 和 β 。设 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 为两个振型。对式 (2-75) 的两边先后乘以 $\boldsymbol{\varphi}_i$ ，再前乘以 $\boldsymbol{\varphi}_j^T$ 得到

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_i = \alpha \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i + \beta \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i \quad (2-76)$$

根据振型正交性再由式 (2-76) 得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_i &= 0 & (i \neq j) \\ \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_i &= (\alpha + \beta \omega_j^2) m_{pj} & (i=j) \end{aligned}$$

式中

$$m_{pj} = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j$$

令

$$\alpha + \beta \omega_j^2 = 2\zeta_j \omega_j \quad (2-77)$$

则

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_j = 2\zeta_j \omega_j m_{pj}$$

由式 (2-77) 得到

$$\zeta_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \quad (2-78)$$

实测两个阻尼比即可求解 α 与 β 。

结构动力学方程主要采用振型叠加法和直接积分法。前者用到振型正交条件，但不同的振型之间不能解耦时（在结构与地基的相互作用问题中，地基的阻尼往往大于结构本身的阻尼，对于结构和地基应分别给以不同的 α 与 β 值），应采用直接积分法求解。

2.2.4 结构自振频率与振型

在式 (2-67) 中，令 $\mathbf{P}(t) = 0$ ，得到自由振动方程。在实际工程中，阻尼对结构自振频率和振型的影响不大，因此可进一步忽略阻尼力，得到无阻尼自由振动的运动方程

$$\mathbf{K}\delta + \mathbf{M}\ddot{\delta} = 0 \quad (2-79)$$

设结构做下述简谐运动

$$\delta = \varphi \cos \omega t$$

把上式代入式 (2-79)，可得到齐次方程

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\varphi = 0 \quad (2-80)$$

在自由振动时，结构中各节点的振幅 φ 不全为零，所以结构自振频率方程为

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (2-81)$$

结构的刚度矩阵 \mathbf{K} 和质量矩阵 \mathbf{M} 都是 n 阶方阵，其中 n 是节点自由度的数目，所以式 (2-81) 是关于 ω^2 的 n 次代数方程，由此可求出结构的自振频率

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_n$$

对于每个自振频率，由式 (2-80) 可确定一组各节点的振幅值 $\varphi_i = [\phi_{i1} \ \phi_{i2} \ \dots \ \phi_{in}]^T$ ，它们互相之间应保持固定的比值，但绝对值可任意变化，它们构成一个向量，称为特征向量，在工程上通常称为结构的振型。

因为在每个振型中，各节点的振幅是相对的，其绝对值可取任意数值。在实际工作中，常用以下两种方法之一来决定振型的具体数值。

(1) 规范化振型：取 φ_i 的某一项，例如取第 n 项为 1，即 $\phi_{in} = 1$ ，于是

$$\varphi_i = [\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, 1]^T \quad (2-82)$$

这样的振型称为规范化振型。

(2) 正则化振型：选取 ϕ_{ij} 的数值，使

$$\varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i = 1 \quad (2-83)$$

这样的振型称为正则化振型。

设已求得一振型 $\bar{\varphi}_i = [\bar{\phi}_{i1}, \bar{\phi}_{i2}, \Lambda, \bar{\phi}_{in}]^T$ ，如令

$$\phi_{ji} = \bar{\phi}_{ij} / \bar{\phi}_{in} \quad (2-84)$$

则得到的 $\varphi_i = [\phi_{i1}, \phi_{i2}, \Lambda, \phi_{in}]^T$ 为规范化振型。如令

$$\begin{aligned} \phi_{ji} &= \bar{\phi}_{ij} / c \\ c &= [\bar{\varphi}_i^T \mathbf{M} \bar{\varphi}_i]^{1/2} \end{aligned} \quad (2-85)$$

则得到的 $\varphi_i = [\phi_{i1}, \phi_{i2}, \Lambda, \phi_{in}]^T$ 为正则化振型。

令

$$m_{pi} = \varphi_i^T \mathbf{M} \varphi_i \quad (2-86)$$

当 \mathbf{M} 为集中质量矩阵时，则

$$m_{pi} = [\phi_{i1} \quad \phi_{i2} \quad \Lambda \quad \phi_{in}] \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & m_2 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \\ M \\ \phi_{in} \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^2 m_s \phi_{is}^2$$

当 φ_i 为正则化振型时, 有

$$m_{pi} = 1$$

令

$$k_{pi} = \varphi_i^T \mathbf{K} \varphi_i = \varphi_i^T \omega_i^2 \mathbf{M} \varphi_i = \omega_i^2 m_{pi} \quad (2-87)$$

式中 m_{pi} 和 k_{pi} 分别称为第 i 阶振型相应的广义质量和广义刚度。

由式 (2-87), 得

$$\omega_i = \sqrt{k_{pi}/m_{pi}} \quad (2-88)$$

【例 2-3】 求解 $\mathbf{K}\varphi = \omega^2 \mathbf{M}\varphi$ 的振型, 其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

求解说明

频率方程为

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} 2-0.5\omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 4-\omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-0.5\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

求得 3 个自振频率为

$$\omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 4, \omega_3^2 = 6$$

将 $\omega_1^2 = 2$ 代入式 (2-80) 中, 得到第 1 振型必须满足的方程组为

$$\phi_{11} - \phi_{12} + 0 = 0, -\phi_{11} + 2\phi_{12} - \phi_{13} = 0, \phi_{11} - \phi_{12} + \phi_{13} = 0$$

联立前两个方程解出

$$\phi_{11} = \phi_{13}, \phi_{12} = \phi_{13}$$

取 $\phi_{13} = 1$, 得到规范化的第 1 振型为

$$\varphi_1 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$$

用同样的方法得到第 2、3 振型为

$$\varphi_2 = [-1 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\varphi_3 = [1 \quad -1 \quad 1]^T$$

由式 (2-85) 得到正则化振型为

$$\varphi_1 = [1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]^T$$

$$\varphi_2 = [-1 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\varphi_3 = [1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]^T$$

2.2.5 振型叠加法求解结构的受迫振动

目前, 常用的求解结构受迫振动的方法有两种, 即振型叠加法和直接积分法。

用振型 φ_i 的线性叠加来表示处于运动状态中的结构位移向量

$$\delta = \varphi_1 \eta_1(t) + \varphi_2 \eta_2(t) + \Lambda + \varphi_n \eta_n(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \eta_i(t) \quad (2-89)$$

用 $\varphi_j^T M$ 前乘式 (2-89) 的两边, 由于振型正交性, 等式右边的 n 项中只剩下 $i=j$ 这一项, 即

$$\varphi_j^T M \delta = \eta_j(t) \varphi_j^T M \varphi_j = m_{pj} \eta_j(t)$$

由此得到

$$\eta_i(t) = \frac{\varphi_i^T M \delta}{m_{pi}} \quad (2-90)$$

η_i 和 $\dot{\eta}_i$ 的初始值可表示为

$$\eta_i(0) = \frac{\varphi_i^T M \delta(0)}{m_{pi}} \quad (2-91)$$

$$\dot{\eta}_i(0) = \frac{\varphi_i^T M \dot{\delta}(0)}{m_{pi}} \quad (2-92)$$

现在考虑下列运动方程的求解

$$M \ddot{\delta} + C \dot{\delta} + K \delta = P(t)$$

把式 (2-89) 代入上式, 得到

$$M \sum_{i=1}^n \varphi_i \ddot{\eta}_i + C \sum_{i=1}^n \varphi_i \dot{\eta}_i + K \sum_{i=1}^n \varphi_i \eta_i = P(t)$$

对上式两边前乘以 φ_j^T , 并令 $C = \alpha M + \beta K$, 得到

$$\sum_{i=1}^n \varphi_j^T M \varphi_i \ddot{\eta}_i + \sum_{i=1}^n \varphi_j^T (\alpha M + \beta K) \varphi_i \dot{\eta}_i + \sum_{i=1}^n \varphi_j^T K \varphi_i \eta_i = \varphi_j^T P(t)$$

由于振型正交性, 得到

$$m_{pi} \ddot{\eta}_i + (\alpha + \beta \omega_i^2) m_{pi} \dot{\eta}_i + \omega_i^2 m_{pi} \eta_i = \varphi_j^T P(t)$$

由于 $\alpha + \beta \omega_i^2 = 2\zeta_i \omega_i$, 上式进一步化为

$$\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{1}{m_{pi}} \varphi_j^T P(t) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (2-93)$$

这是二阶常微分方程, 这样的方程共有 n 个, 它们是互相独立的。式 (2-93) 在形式上与单自由度体系的运动方程相同。其解答可用数值积分方法计算, 也可用 Duhamel 积分计算, 即

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_{di} m_{pi}} \int_0^t P^*(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau + e^{-\zeta_i \omega_i t} \left\{ \eta_i(0) \cos \omega_{di} t + \frac{\dot{\eta}_i(0) + \zeta_i \omega_i \eta_i(0)}{\omega_{di}} \sin \omega_{di} t \right\} \quad (2-94)$$

式中

$$\omega_d = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$$

$$P^*(t) = \varphi_j^T P(t)$$

把 $\eta_i(t)$ 代入式 (2-89), 即得到所需解答。在用有限单元法进行结构动力分析时, 自由度数目 n 可以达到几百甚至几千, 但由于高阶振型对结构动力反应的影响一般都很小, 通常只要计算一部分低阶振型就够了。例如对于地震载荷, 一般只要计算前面 5~20 个振型。对于爆炸和冲击载荷, 就需要取更多的振型, 有时需取出多达 $2n/3$ 个振型进行计算, 而对于振动激发的动力反应, 有时只有一部分中间的振型起作用。

运动方程 (2-67) 是二阶常微分方程组, 可用数值积分方法直接求解。应用于动力问题的直

接积分方法很多，比如线性加速度方法、Wilson 方法、Newmark 方法等，此处不再赘述。

2.3 结构非线性有限单元法

固体力学问题，从本质上讲是非线性的，线性假设仅是实际问题中的一种简化。在分析线性弹性体系时，假设节点位移无限小；材料的应力与应变关系满足虎克定律；加载时边界条件的性质保持不变，如果不满足上述条件之一的，就称为非线性问题。

通常把非线性问题分成两大类：几何非线性和材料非线性，但 ANSYS 也能处理施工或加工过程中结构变化的非线性。如果体系的非线性是由于材料的应力与应变关系的非线性引起的，则称为材料非线性。如铝材和许多高分子材料。如果结构的位移使体系的受力状态发生了显著变化，以至不能采用线性体系的分析方法时则称为几何非线性。几何非线性又可分为以下情况：①大位移小应变问题，如高层建筑、大跨度钢架结构的结构分析大多属于此类问题；②大位移大应变问题，如金属的压力加工问题；③结构的变位引起外载荷大小、方向或边界支承条件的变化等问题。ANSYS 用单元死活来处理施工非线性。

用有限单元法分析非线性问题时仍由分析线性问题的以下三个基本步骤组成，但需要反复迭代：

(1) 单元分析。和线性问题相比较，非线性问题的基本不同之处，在于单元刚度矩阵的形成有所差别。当仅为材料非线性问题时，应使用材料的非线性本构关系；当仅为几何非线性问题时，在计算应变一位移矩阵 B 时，则应考虑位移的高阶导数项的效应。同时，对于所有积分，应考虑单元体的变化。对于同时兼有几何非线性和材料非线性的两种非线性问题时，则应考虑这两种非线性的耦合效应。

(2) 整体组集。单元刚度矩阵集成为整体刚度矩阵，整体刚度方程的建立及约束处理，大体上与线性体系问题相同，只是通常将整体刚度方程写成增量形式。

(3) 非线性方程组的求解。非线性问题求解方法大体上可分为：增量法、迭代法和混合法，它与线性方程组的求解有很大差别。

本节主要讨论材料塑性问题和几何大变形小应变问题。

2.3.1 塑性力学问题

在固体力学问题中，当应变比较小时，应力应变关系是线弹性的；当应变比较大时，应力应变关系往往不再是线弹性的，这类问题属于塑性力学范畴。有限单元法在这方面的应用是很成功的。

1. 单向受力的应力-应变关系

根据金属材料的拉伸试验，受力超过屈服极限以后，材料又恢复了抵抗变形的能力，必须增加载荷，才能继续产生变形，这种现象称为材料的强化（或硬化）。载荷达到最高点时的应力，称为强度极限。

为了便于研究，在试验资料的基础上，常抽象为一些简化的模型，如图 2-16 所示。

2. 应力张量的分解与应力不变量

在外力作用下，物体内与应力所对应的应变通常分为体积变形和形状变形两部分，这两种变化的变化规律是不同的，对金属而言，在各向均匀压力（或称静水压力）作用下，体积变形是弹性的，不产生塑性变形。为了研究塑性变形必须把各向均匀的压力分离出来，对应的张量做如

下分解

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2-95)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2-96)$$

式 (2-95) 右边第 1 项称为应力球张量；第 2 项称为应力偏张量，以 s_{ij} 表示为

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} \quad (2-97)$$

对于金属来说，进入塑性状态后，其体积变形仍是弹性的，它由应力球张量引起；而与形状改变有关的塑性变形则是由应力偏量引起的。

由弹性力学可知，任一点的主应力 σ_i 决定于下列方程

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 - I_2 \sigma_i - I_3 = 0 \quad (2-98)$$

当坐标轴的方向改变时，应力张量的分量均将改变，但主应力的值不变。因此，式 (2-98) 中系数 I_1 、 I_2 、 I_3 的值与坐标轴的取向无关，称为应力张量的 3 个不变量，其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= -(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-99)$$

同样，应力偏张量也有 3 个不变量，即

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= s_x + s_y + s_z \\ J_2 &= -(s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x) + s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2 \\ J_3 &= s_x s_y s_z + 2s_{xy} s_{yz} s_{zx} - s_x s_{yz}^2 - s_y s_{zx}^2 - s_z s_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-100)$$

下面研究等斜面上的应力。等斜面是其法线与 3 个主应力方向成等角的平面，这样的平面共有 8 个，所以也称为八面体的面。八面体面上的正应力为

$$\sigma_8 = \sigma_m \quad (2-101)$$

八面体面上的切应力为

$$\tau_8 = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \quad (2-102)$$

3. 应变张量的分解

在小变形的条件下，位移与应变的关系为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

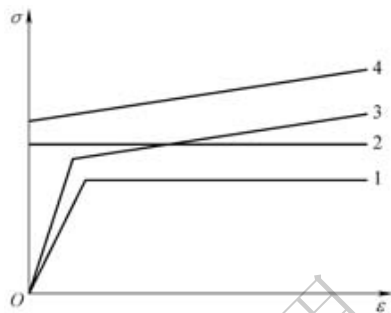


图 2-16 几种材料简化模型

- 1—理想弹塑性模型
- 2—理想刚塑性模型
- 3—线性强化弹塑性模型
- 4—线性强化刚塑性模型

如令

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}$$

且有

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$$

与应力张量相似, 应变张量也可分解为应变球张量与应变偏张量, 即

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (2-103)$$

式中 $\varepsilon_m = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$, 为平均应变; 式 (2-103) 右边第 1 项为应变球张量; 第 2 项为应变偏张量; 以 e_{ij} 表示, 即

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (2-104)$$

应变球张量具有各方向相同的正应变, 它代表体积的改变。应变球张量的 3 个正应变之和为零, 说明它没有体积变形, 只反映形状的改变。

应变偏张量的 3 个不变量分别以 J'_1 、 J'_2 、 J'_3 表示为

$$\left. \begin{aligned} J'_1 &= e_x + e_y + e_z = 0 \\ J'_2 &= \frac{1}{6} [(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)] \\ J'_3 &= e_x e_y e_z + 2e_{xy} e_{yz} e_{zx} - e_x e_y^2 - e_y e_z^2 - e_z e_x^2 \end{aligned} \right\} \quad (2-105)$$

4. 屈服准则

单向受力时, 以理想弹塑性模型为例, 当应力小于屈服极限 σ_s 时, 材料处于弹性状态。当应力达到 σ_s 时, 材料即进入塑性状态。因此, $\sigma = \sigma_s$ 就是单向受力时的屈服条件。

在复杂应力状态下, 物体内某一点开始产生塑性变形时, 应力也必须满足一定的条件, 它就是复杂应力状态下的屈服条件。一般说来, 它应是 6 个应力分量的函数, 可表示为

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = C \quad (2-106)$$

式中 C 为与材料有关的常数; F 为屈服函数。

我们把某点的 6 个应力分量代入式 (2-106), 如果 $F < C$, 表明该点处于弹性状态; 如果 $F = C$, 则表明该点处于塑性状态。

考虑的材料是各向同性的, 坐标方向的改变对屈服条件没有影响, 因此可用主应力表示为

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C \quad (2-107)$$

也可用应力张量不变量 I_1 、 I_2 、 I_3 , 或应力偏量不变量 J_1 、 J_2 、 J_3 来表示。

一类材料, 如岩石、土体、混凝土等, 其屈服条件受到静水应力的影响, 一般表示为

$$F(I_1, J_2, J_3) = C \quad (2-108)$$

另一类材料，如金属，其屈服条件不受静水应力的影响，可表示为

$$F(J_2, J_3) = C$$

屈服条件常称为屈服准则。

(1) 特雷斯卡 (Tresca) 屈服准则。1864 年特雷斯卡提出：当最大切应力 τ_{\max} 达到某一定值 k 时，材料就发生屈服，此条件可表示为

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2] = 0 \quad (2-109)$$

式 (2-109) 也可用应力偏量不变量表示为

$$F = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0 \quad (2-110)$$

屈服面如图 2-17 所示。

上面的常数 k 是由单向拉伸试验确定的，所以 $k = \sigma_s/2$ 。如果常数是由纯剪试验确定，则 $k = \tau_s$ ，其中 τ_s 为纯剪时的屈服极限。按照 Tresca 屈服条件，材料的剪切屈服极限与拉伸屈服极限之间存在如下关系：

$$\tau_s = \sigma_s/2 \quad (2-111)$$

Tresca 屈服条件是主应力的线性函数，应用比较方便，它与金属材料的试验资料也基本吻合。但它忽略了中间主应力的影响，且屈服线上有角点，给数学处理带来了一定困难，这是其不足之处。

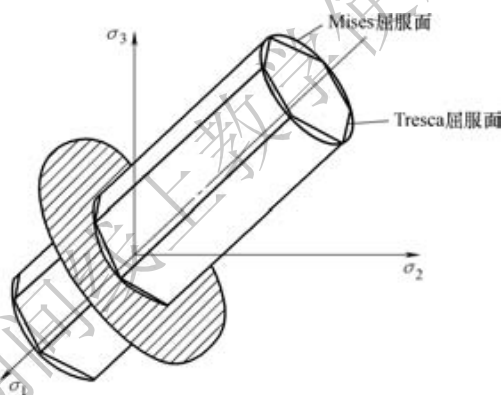


图 2-17 Tresca 和 Mises 屈服面

(2) 米泽斯 (Mises) 屈服准则。由米泽斯于 1913 年提出的屈服条件，在偏量平面 π 上的屈服线是 Tresca 六边形的外接圆。主应力空间中过原点并与坐标轴成等角的直线为静水应力轴。过原点并与静水应力轴垂直的平面为 π 平面。与 π 平面平行的平面为偏量平面。如图 2-17 所示屈服面 Mises 在偏量平面上是一个六边形的外接圆，在坐标轴平面上是椭圆。其表达式为

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2 = k^2 \quad (2-112)$$

它表明，只要应力偏量的第二不变量达到某一定值时，材料就屈服。 σ_s 是单向拉伸时的屈服极限。

在纯剪切的情况下

$$J_2 = \tau_{xy}^2 = \tau_s^2 = k^2 \quad (2-113)$$

可见，按照 Mises 屈服条件，材料的剪切屈服极限 τ_s 与拉伸屈服极限 σ_s 之间的关系为

$$\tau_s = \sigma_s/\sqrt{3} \quad (2-114)$$

Mises 屈服准则弥补了 Tresca 屈服准则的不足，更接近实验结果。Mises 屈服准则对金属材料比较吻合。

(3) 德鲁克-普拉格 (Drucker-Prager) 屈服准则。对基层、垫层和土地基等弹塑性体积较大的变形材料，莫尔-库仑 (Mohr-Coulomb) 的强度理论为最早提出的屈服准则，理论表达式为

$$\tau_s = C - \sigma_s \tan \phi \quad (2-115)$$

式中 C 为材料黏聚力； ϕ 为内摩擦角； τ_s 为破坏面上的切应力； σ_s 为破坏面上的正应力。

考虑到莫尔-库仑准则在 π 平面上是等边不等角六边形，具有角偶性，当应力落在屈服面尖点上会导致其导数的方向不定。德鲁克-普拉格于 1952 年对莫尔-库仑准则加以修正，表

述为

$$F = \alpha I_1 - \sqrt{J_2} + K = 0 \quad (2-116)$$

式中 $\alpha = \frac{\sin\phi}{\sqrt{3(3+\sin^2\phi)}}$; $K = \frac{\sqrt{3}C\cos\phi}{\sqrt{(3+\sin^2\phi)}}$; I_1 为第一应力状态不变量; J_2 为第二应力偏量状态不变量。

在土基、路面等的形变中采用德鲁克-普拉格准则是比较简明的。还有许多其他屈服准则，此处不再赘述。

5. 强化条件

如图 2-18，在单向受力时，当材料中应力超过初始屈服点 A 而进入塑性状态后卸载，此后再次加载，应力-应变关系将仍按弹性规律变化，直至卸载前所达到的最高应力点 B，然后材料再次进入塑性状态。应力点 B 是材料在经历了塑性变形后的新屈服点，称为强化点。它是材料在再次加载时，应力-应变关系按弹性还是按塑性规律变化的区分点。

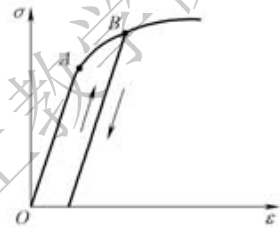


图 2-18 单向受力时材料的强化

同样，当材料在复杂应力状态下进入塑性后卸载，然后再加载，屈服函数也会随着以前发生过的塑性变形的历史而有所改变。当应力分量满足某一关系时，材料将重新进入塑性状态而产生新的塑性变形，这种现象叫作强化。材料在初始屈服以后再进入塑性状态时，应力分量间所必须满足的函数关系，称为强化条件或加载条件，有时也称为后继屈服条件，以区别于初始屈服条件。强化条件在应力空间中的图形称为强化面或加载面。

(1) 各向同性强化模型。假定加载面在应力空间中的形状和中心位置保持不变，随着强化程度的增加，由初始屈服面在形状上作相似的扩大。加载面仅由其曾经达到过的最大应力点所决定，与加载历史无关，如图 2-19a 所示。强化条件可表示为

$$F(\sigma_{ij}) - k(\epsilon^p) = 0 \quad (2-117)$$

式中 $k(\epsilon^p)$ 为有效塑性应变 ϵ^p 的函数。

(2) 随动强化模型。假定在塑性变形过程中，屈服曲面的形状和大小都不改变，只是在应力空间中作刚性平移，如图 2-19b 所示。设在应力空间中，屈服面内部中心的坐标用 α_{ij} 表示，它在初始屈服时等于零，于是，随动强化模型的加载曲面可表示为

$$F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k = 0 \quad (2-118)$$

显然， $F(\alpha_{ij}) - k = 0$ 为初始屈服曲面，产生塑性变形以后，加载面随着 α_{ij} 而移动， α_{ij} 称为移动张量。

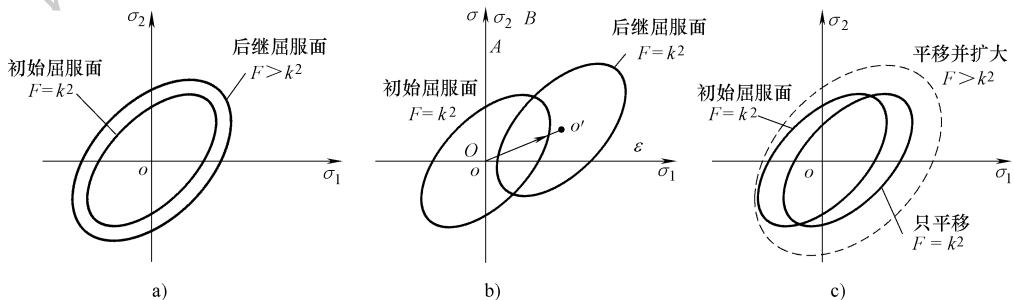


图 2-19 强化模型

a) 各向同性强化 b) 随动强化 c) 混合强化

(3) 混合强化模型 把各向同性强化模型和随动强化模型加以组合, 得到混合强化模型, 如图 2-19c 所示。它假定在塑性变形过程中, 加载曲面不但作刚性平移, 还同时在各个方向作均匀扩大。加载曲面可表示为

$$F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k(\varepsilon^p) = 0 \quad (2-119)$$

式中 α_{ij} 为屈服面中心的移动; k 为硬化参数, 是有效塑性应变 ε^p 的函数。

在以上几种强化模型中, 各向同性强化模型使用最为广泛。这一方面是由于它便于进行数学处理; 另一方面, 如果在加载过程中应力方向 (或各应力分量的比值) 变化不大, 采用各向同性强化模型的计算结果与实际情况也比较符合。随动强化模型可以考虑材料的包兴格 (Bauschinger) 效应, 在循环加载或可能出现反向屈服的问题中, 需要采用这种模型。

6. 加载与卸载准则

材料达到屈服状态以后, 加载和卸载时的应力应变规律不同。单向受力时, 只有一个应力分量, 由这个应力分量的增加或减小, 就可判断是加载还是卸载。对于复杂应力状态, 6 个应力分量中, 各分量可增可减, 为了判断是加载还是减载, 需要一个准则。

(1) 理想塑性材料的加载和卸载 理想塑性材料不发生强化, 加载条件和屈服条件相同, 应力点不可能位于屈服面外。当应力点保持在屈服面上时, 称为加载, 因为这时塑性变形可以增长。设屈服条件为 $F(\sigma_{ij}) = 0$ 。当应力达到屈服状态时, $F(\sigma_{ij}) = 0$, 对于应力增量 $d\sigma_{ij}$, 如果 $dF = F(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - F(\sigma_{ij}) = 0$, 表示新的应力点仍保持在屈服面上, 属于加载。反之, 如果 $dF = F(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - F(\sigma_{ij}) < 0$, 表示应力点从屈服面上退回到屈服面内, 属于卸载。因此, 理想塑性材料的加载和卸载准则可表示为

$$\left. \begin{aligned} F(\sigma_{ij}) < 0 & \quad (\text{弹性状态}) \\ F(\sigma_{ij}) = 0, dF = 0 & \quad (\text{加载}) \\ F(\sigma_{ij}) = 0, dF < 0 & \quad (\text{卸载}) \end{aligned} \right\} \quad (2-120)$$

(2) 强化材料的加载和卸载 强化材料的加载面可以扩大, 因此只有当 $d\sigma$ 指向面外时才是加载。当 $d\sigma$ 沿着加载面变化时, 加载面并不改变, 只表示一点的应力状态从一个塑性状态过渡到另一个塑性状态, 但不引起新的塑性变形, 这种变化过程称为中性变载。 $d\sigma$ 指向加载面内时为卸载。强化材料的加载和卸载准则可表示为

$$\left. \begin{aligned} F(\sigma_{ij}) = 0, dF > 0 & \quad (\text{加载}) \\ F(\sigma_{ij}) = 0, dF = 0 & \quad (\text{中性变载}) \\ F(\sigma_{ij}) = 0, dF < 0 & \quad (\text{卸载}) \end{aligned} \right\} \quad (2-121)$$

7. 黏弹塑性路面有限元计算分析与步骤

下面以沥青路面为例加以说明。

在载荷作用下, 路面总应变速率 $\dot{\varepsilon}$ 分为弹性应变速率 $\dot{\varepsilon}^e$ 和黏塑性应变速率 $\dot{\varepsilon}^{vp}$, 即

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (2-122)$$

则应力速率计算公式为

$$\dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon}^e \quad (2-123)$$

开始产生塑性变形的屈服条件表示为

$$F(\sigma, \varepsilon^{vp}) - F_0 = 0 \quad (2-124)$$

式中 F_0 为屈服准则下限, 一般取 0。

路面黏塑性应变速率的数值, 与当时的应力状态有关

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{vp}} = f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2-125)$$

广泛采用黏塑性流动法则

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{vp}} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2-126)$$

式中 γ 为流动系数，具体获取方法参见有关文献；塑性势 $Q = Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^{\text{vp}}, k)$ ，路面计算中采用相关联流动法则， $Q \equiv F$ ；符号 $\langle \rangle$ 的意义如下：

$$\left. \begin{aligned} \langle \phi(F) \rangle &= \phi(F) & (F > 0) \\ \langle \phi(F) \rangle &= 0 & (F \leq 0) \end{aligned} \right\}$$

路面简单计算中取 $\phi(F) = F$ 。

由式 (2-126) 得到当前应力状态下的黏塑性应变率。

把路面响应分析计算时间长度 t 划分为一系列时段，在 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 内产生的黏塑性应变增量计算公式为

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{vp}} = \boldsymbol{\epsilon}^{\text{vp}}(t_{n+1}) - \boldsymbol{\epsilon}^{\text{vp}}(t_n) = \Delta t_n [(1-s)\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{\text{vp}} + s\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{\text{vp}}] \quad (2-127)$$

式中 取 $s=0$ ，为前向差分法，是显式解法；取 $s=1$ ，为后向差分法，是隐式解法；取 $s=1/2$ ，为中点差分法。

把 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{vp}}$ 按泰勒展开，忽略高阶项，得到

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}^{\text{vp}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{\text{vp}} + \mathbf{H}_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n \quad (2-128)$$

式中 $\mathbf{H}_n = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{vp}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{t=t_n}$ ； $\Delta \boldsymbol{\sigma}_n$ 为应力增量，未知。

把式 (2-128) 代入式 (2-127)，得到

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{vp}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{\text{vp}} \Delta t_n + \mathbf{C}_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n \quad (2-129)$$

式中 $\mathbf{C}_n = s \Delta t_n \mathbf{H}_n$ 。

在时间 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 内产生的应力增量为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{c}} = \mathbf{D} (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{vp}}) \quad (2-130)$$

把 $\Delta \boldsymbol{\epsilon}_n = \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\delta}_n$ 代入式 (2-130)，得到

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D} (\mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\delta}_n - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{vp}}) \quad (2-131)$$

将式 (2-129) 代入式 (2-131)，得到

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D} (\mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\delta}_n - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{\text{vp}} \Delta t_n - \mathbf{C}_n \Delta \boldsymbol{\sigma}_n)$$

整理为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \bar{\mathbf{D}}_n (\mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\delta}_n - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n^{\text{vp}} \Delta t_n) \quad (2-132)$$

式中

$$\bar{\mathbf{D}}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{D} \mathbf{C}_n)^{-1} \mathbf{D} = (\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{C}_n)^{-1}$$

在 Δt_n 时间内的平衡条件为

$$\int \mathbf{B}^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_n dV = \Delta \mathbf{P}_n \quad (2-133)$$

式中 dV 为体积微元。

将式 (2-132) 代入式 (2-133)，得到平衡方程组

$$\mathbf{K}_n \Delta \boldsymbol{\delta}_n = \Delta \mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n^{\text{vp}} \quad (2-134)$$

式中

$$\mathbf{K}_n = \int \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{D}}_n \mathbf{B} dV$$

$$\Delta P_n^{vp} = \int B^T \bar{D}_n \bar{\epsilon}_n^{vp} \Delta t_n dV$$

式中 K_n 为第 n 步迭代计算的刚度矩阵； ΔP_n^{vp} 为黏塑性应变增量引起的等效载荷增量； ΔP_n 为外载荷增量。

由式 (2-128) 解出位移增量 $\Delta \delta_n$ ，代入式 (2-132) 求得应力增量 $\Delta \sigma_n$ ，从而有

$$\delta_{n+1} = \delta_n + \Delta \delta_n \quad (2-135)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma_n \quad (2-136)$$

再修正黏塑性应变增量，由式 (2-129) 可知

$$\Delta \epsilon_n^{vp} = \Delta \epsilon_n - D^{-1} \Delta \sigma_n = B \Delta \delta_n - D^{-1} \Delta \sigma_n \quad (2-137)$$

从而得到代表永久变形的真实的黏塑性应变

$$\epsilon_{n+1}^{vp} = \epsilon_n^{vp} + \Delta \epsilon_n^{vp} \quad (2-138)$$

黏弹塑性应变速率 $\dot{\epsilon}_n^{vp}$ 是由式 (2-125) 计算的，当各积分点的黏塑性应变速率均等于零时，表示变形已经稳定，可以停止计算。

在任意时刻 t ，应力状态都应满足平衡方程

$$\int B^T \sigma dV - P = 0 \quad (2-139)$$

由于线性化带来的误差，算得的应力 σ_{n+1} 不一定满足上述平衡条件，而且这种误差是会累积的。为了避免误差的累积，可用式 (2-140) 计算失衡力，即

$$\psi_{n+1} = \int B^T \sigma_{n+1} dV - P_{n+1} \quad (2-140)$$

然后在下一步计算时，把上述失衡量合并到载荷增量中去。

时间步的限制为

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mises 材料} \\ \text{Mohr-Coulomb 材料} \end{array} \right\} \Delta t \leq \left. \begin{array}{l} \frac{4(1+\mu)F_0}{3\gamma E} \\ \frac{4(1+\mu)(1-2\mu)F_0}{\gamma(1-2\mu+\sin^2\phi)E} \end{array} \right\} \quad (2-141)$$

对每一时间步 Δt 计算步骤如下：

第1步：已知 δ_n 、 σ_n 、 ϵ_n 、 ϵ_n^{vp} 、 H_n ，计算下列各量

$$C_n = s \Delta t_n H_n$$

$$\bar{D}_n = (D^{-1} + C_n)^{-1}$$

$$K_n = \int B^T \bar{D}_n B dV$$

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{t=t_n}$$

$$\Delta P_n^{vp} = \int B^T \bar{D}_n \dot{\epsilon}_n^{vp} \Delta t_n dV$$

$$\psi_n = \int B^T \sigma_n dV$$

第2步：由下式求解位移增量 $\Delta \delta_n$ ，即

$$\Delta \delta_n = K_n^{-1} (\Delta P_n + \Delta P_n^{vp} + \psi_n)$$

计算 $\Delta \sigma_n$ 、 δ_{n+1} 、 σ_{n+1} 为

$$\Delta \sigma_n = \bar{D}_n (B \Delta \delta_n - \dot{\epsilon}_n^{vp} \Delta t_n)$$

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \delta_n + \Delta\delta_n \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n + \Delta\sigma_n\end{aligned}$$

第 3 步：按下式计算 ϵ_{n+1}^{vp} ，即

$$\epsilon_{n+1}^{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{t=t_{n+1}}$$

第 4 步：检查各积分点的粘塑性应变速率 ϵ_{n+1}^{vp} ，如果其数值均已接近零，停止计算；否则转至第 1 步。

2.3.2 大位移问题

在大多数的大位移问题中，尽管位移很大，结构的应变仍然不大，属于大位移小应变问题，材料的应力-应变关系仍是线性的，只是应变-位移关系是非线性的，即所谓几何非线性。如果不但位移-应变关系是非线性的，而且应力-应变关系也是非线性的，那么即是双重非线性（材料非线性和几何非线性）问题。

首先，用虚位移原理建立有限元平衡方程组。用列阵 ψ 表示每个节点广义内力和广义外力矢量的和，根据虚位移原理，外力因虚位移所做的功，等于结构因虚应变而产生的应变能，所以有

$$d\delta^T \psi = \int d\epsilon^T \sigma dV - d\delta^T P = 0$$

式中 $d\delta$ 为虚位移； $d\epsilon$ 为虚应变； P 为载荷列阵。

再用应变的增量形式写出位移和应变的关系，即

$$d\epsilon = \bar{B} d\delta \quad (2-142)$$

利用式 (2-142) 消去 $d\delta^T$ ，得到非线性问题的平衡方程组为

$$\psi(\delta) = \int \bar{B}^T \sigma dV - P = 0 \quad (2-143)$$

不论是大大位移问题还是小位移问题，式 (2-143) 都是适用的。

在大位移情况下，应变-位移关系是非线性的，矩阵 \bar{B} 是 δ 的函数。为了运算方便起见，可以写成

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_L \quad (2-144)$$

式中 \bar{B}_0 为线性应变分析的矩阵项，与 δ 无关； \bar{B}_L 为由非线性变形引起的，与 δ 有关，通常 \bar{B}_L 是 δ 的线性函数。

在大多数情况下，尽管位移很大，结构的应变并不大，应力-应变关系还是线性弹性关系，因此有

$$\sigma = D\epsilon \quad (2-145)$$

式中 D 为材料的弹性矩阵。

如果应变比较大，已属于非线性应力-应变关系，则属于弹塑性问题。

通常用牛顿-拉夫逊方法求解式 (2-143)，因此，需建立 $d\sigma$ 和 $d\psi$ 之间的关系，由式 (2-144) 取 ψ 的微分，得到

$$d\psi = \int d\bar{B}^T \sigma dV + \int \bar{B}^T d\sigma dV \quad (2-146)$$

又

$$d\sigma = D d\epsilon = D \bar{B} d\delta$$

$$d\bar{B} = d\bar{B}_L$$

代入式 (2-146)，得到

$$d\psi = \int d\bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \bar{\mathbf{K}} d\boldsymbol{\delta} \quad (2-147)$$

式中

$$\bar{\mathbf{K}} = \int \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dV = \int (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \mathbf{D} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) dV = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L \quad (2-148)$$

$$\mathbf{K}_0 = \int \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dV \quad (2-149)$$

$$\mathbf{K}_L = \int (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0) dV \quad (2-150)$$

式中 \mathbf{K}_0 为小位移的线性刚度矩阵； \mathbf{K}_L 为初始位移矩阵或大位移矩阵。

式(2-147)右边第1项可写成如下形式：

$$\int d\bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_\sigma d\boldsymbol{\delta} \quad (2-151)$$

式中 \mathbf{K}_σ 为关于应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称矩阵，称为初应力矩阵或几何刚度矩阵。

于是，式(2-147)可以写成

$$d\psi = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_L) d\boldsymbol{\delta} = \mathbf{K}_r d\boldsymbol{\delta} \quad (2-152)$$

式中 $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_L$ ，为切线刚度矩阵。

2.4 本章小结

有限单元法分析的步骤一般是：①网格划分；②选择一种协调的位移模式表示单元任一点的位移，求出广义坐标和形函数；③求出应变矩阵、应力矩阵、单元刚度矩阵、整体刚度矩阵，其中刚度矩阵的求解是最关键的一步；④利用能量原理求出等效节点载荷，列出总体平衡方程，求出节点位移；⑤进行其他量的分析。

平面问题分平面应力问题和平面应变问题两类。有限元分析中的有关量只是两个坐标的函数。平面应力问题一般是指很薄的均匀薄板，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化，不为零的应力分量为薄板平面内的应力。平面应变问题一般指厚板外缘或较长柱形体的柱面上受有平行于横截面并且不沿长度变化的面力，同时，体力也平行于横截面且不沿长度变化。不为零的应变分量为截面内的应变。

轴对称问题同平面问题的根本区别在于前者单元为圆环，后者为平板；前者节点力和载荷对整个圆周进行考虑，后者只考虑板边受力。

为了减少单元数量，提高单元与实际边界的逼近程度，提高计算精度，减小计算量，对一般由直线或平面围成的母单元进行等参数变换得到等参单元。这样构造的单元具有双重特性：作为实际单元，其几何特性、受力情况、力学性能都来自真实结构，充分反映了它的属性；作为基本单元，其形状规则，便于计算与分析。

虚位移原理和最小势能原理是单元分析和整体分析的理论基础。虚位移原理表明，如果在虚位移发生之前，物体处于平衡状态，那么在虚位移发生时，外力所做虚功等于物体的虚应变能。虚位移原理不但适用于线性材料，也适用于非线性材料。最小势能原理是指在所有满足边界条件的协调（连续）位移中，那些满足平衡条件的位移使物体势能取驻值。对于线性弹性体，势能取最小值。最小势能原理是变分原理在材料力学中的应用，即里兹（Ritz）法，是有限元法的核心理论基础之一。

动力学问题要考虑结构的质量和阻尼。质量矩阵有协调质量矩阵和集中质量矩阵两种，复杂的结构采用前者。通常是根据实测资料，由振动过程中结构整体的能量消耗来决定阻尼的近似值，因此不是计算单元阻尼矩阵，而直接计算结构的整体阻尼矩阵，一般采用瑞利（Rayleigh）阻尼，与质量矩阵和刚度矩阵呈线性关系。对于每个自振频率，可确定一组各节点的振幅值，它们互相之间应保持固定的比值，但绝对值可任意变化，它们构成一个向量，称为特征向量，即振型。常用的求解结构受迫振动的方法有振型叠加法和直接积分法。

对结构非线性问题的有限元方法，是许多子步的反复迭代，每个子步的具体过程同结构线性问题的有限元方法：单元分析、整体组集、非线性方程组的求解。本书主要针对塑性和大位移问题有限元法进行了阐述。材料的塑性主要采用理想弹塑性模型、理想刚塑性模型、线性强化弹塑性模型、线性强化刚塑性模型等几种简化模型；常用的屈服准则有特雷斯加（Tresca）屈服准则、米泽斯（Mises）屈服准则、德鲁克-普拉格（Drucker-Prager）屈服准则等几种；强化模型有向同性强化模型、随动强化模型和混合强化模型三种。以沥青路面为例加以说明了黏弹塑性材料结构的有限元方法。大变形问题的重点在切线刚度矩阵的求解，其由线性刚度矩阵、初始位移矩阵（或大位移矩阵）和初应力矩阵（或几何刚度矩阵）三部分组成。

2.5 思考与练习

1. 概念题

- (1) 平面应力问题与平面应变问题的区别是什么？
- (2) 轴对称问题有什么特征？它和平面问题的主要区别是什么？
- (3) 什么是等参数单元？
- (4) 介绍虚位移原理和最小势能原理。
- (5) 什么是结构的振型？
- (6) 说明几种材料简化模型的特点。
- (7) 说明强化、强化条件、强化面（加载面）的定义是什么？

2. 计算操作题

(1) 轴对称问题中三角形单元 ijm 面积为 A ，平均半径为 r ，密度为 ρ ，求重力在节点产生的节点载荷。

(2) 图 2-20 所示等腰直角三角形单元，设泊松比 $\mu=1/4$ ，记弹性模量为 E ，厚度为 t ，求形函数矩阵 N 、应变矩阵 B 、应力矩阵 S 与单元刚度矩阵 K^e 。

(3) 正方形薄板的受力与约束如图 2-21 所示，划分为两个三角形单元，泊松比 $\mu=1/4$ ，板厚为 t ，求各节点位移与应力。

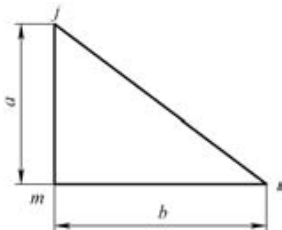


图 2-20 直角三角形单元

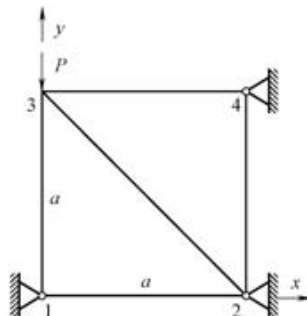


图 2-21 正方形薄板

(4) 两个轴对称等边直角三角形单元，形状、大小、方位都相同，位置如图 2-22 所示，弹性模量为 E ，泊松比 $\mu=0.15$ ，试分别计算它们的单元刚度矩阵。



图 2-22 轴对称三角形单元

试读版本仅供防疫期间线上教学使用

第 3 章 ANSYS 的建模

有限元分析的最终目的是还原一个实际工程系统的数学行为特征，即分析必须针对一个物理原型准确的数学模型。从广义上讲，模型包括所有节点、单元、材料属性、实常数、边界条件，以及其他用来表现这个物理系统的特征。在 ANSYS 术语中模型生成一般狭义地指，用节点和单元表示的空间体域及与实际系统连接的生成过程。本书讨论的模型生成是指模型的节点和单元的几何造型、材料属性、实常数及网格划分。

【本章重点】

- 生成模型的步骤。
- 坐标系和工作平面使用。
- 复杂实体造型方法。
- 自底向上（自下而上）建模操作和自顶向下（自上而下）建模操作。

3.1 建模基础

在 ANSYS 前处理模块，通过灵活使用自上而下或自下而上两种建模方法，可完成非常复杂的实体造型，然后进行网格划分。也可以简单地从其他 CAD 软件读入早已创建好的实体模型。

3.1.1 模型的生成

ANSYS 本身提供了强大的实体几何建模功能，可以像一般的 CAD 软件一样创建几何模型，也可以输入在 CAD 系统创建的模型。生成模型的典型步骤如下：

- (1) 确定分析目标及模型的基本形式，选择合适的单元类型并考虑如何建立适当的网格密度。
- (2) 进入前处理/PREP7。
- (3) 建立工作平面。
- (4) 激活适当的坐标系。
- (5) 用自底向上或自顶向下方法生成实体。
- (6) 用布尔运算或编号控制适当地连接各个独立的实体模型域。
- (7) 生成单元属性表（单元类型、实常数、材料属性和单元坐标系），设置单元属性指针。
- (8) 设置网格划分控制以建立需要的网格密度。若需用自动网格划分功能，应退出前处理后激活自适应网格划分。
- (9) 通过划分实体模型的网格生成节点和单元。
- (10) 在生成节点和单元后定义面与面的接触单元、自由度耦合及约束方程等。
- (11) 保存模型数据为 Jobname.DB。
- (12) 退出前处理。

3.1.2 坐标系

ANSYS 有多种类型的坐标系统。

1. 全局坐标系

用户定义一个节点或关键点时，系统默认为全局笛卡儿坐标系。全局坐标系即绝对坐标参考系，包括笛卡儿坐标系、柱坐标系及球坐标系，它们都遵从右手准则。在全局坐标系中，用户可在空间坐标定位几何项（如节点和关键点等）。

2. 局部坐标系

可以通过下列方式建立各种局部坐标系：

(1) 在全局笛卡儿坐标系中确立局部坐标系。

GUI: Utility Menu>Work Plane>Local Coordinate Systems>Create Local CS>At Specified Loc.

命令: LOCAL。

(2) 在已存在的节点上建立局部坐标系。

GUI: Utility Menu>Work Plane>Local Coordinate Systems>Create Local CS>By 3 Nodes。

命令: CS。

(3) 在已经存在的关键点上建立局部坐标系。

GUI: Utility Menu>WorkPlane>Local Coordinate Systems>Create Local CS>By 3 Keypoints。

命令: CSKP。

(4) 在目前的工作平面的中心原点建立局部坐标系。

GUI: Utility Menu>WorkPlane>Local Coordinate Systems>Create Local CS>At WP Origin。

命令: CSWPLA。

(5) 在当前活动坐标系中建立局部坐标系（无对应的 GUI 命令）。

命令: CLOCAL。

确定的局部坐标系成为当前活动坐标系。建立一个局部坐标系后，其 CS 识别值一定被赋值为 11 或更大的一个数值。可以通过执行以下命令删除局部坐标系：

GUI: Utility Menu>WorkPlane>Local Coordinate Systems>Delete Local CS。

命令: CSDELE。

还可以通过执行以下命令查看全局或局部坐标系的状态：

GUI: Utility Menu>List>Other>Local Coord Sys。

命令: CSLIST。

3. 活动坐标系

某个时刻只有一个坐标系起作用，称为活动坐标系。默认模式下笛卡儿坐标系为活动坐标系，用户定义的一个新的局部坐标系自动成为活动坐标系。如果需要激活全局坐标系或某个局部坐标系，则通过执行如下命令实现：

GUI: Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Global Cartesian。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Global Cylindrical。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Global Spherical。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Specified Coord Sys。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Working Plane。

命令: CSYS。

4. 显示坐标系

决定列出和显示几何项的坐标系，称为显示坐标系。可以通过执行以下命令改变显示坐标系：

GUI: Utility Menu>WorkPlane>Change Display CS to>Global Cartesian。

Utility Menu>WorkPlane>Change Display CS to>Global Cylindrical。

Utility Menu>WorkPlane>Change Display CS to>Global Spherical。

Utility Menu>WorkPlane>Change Display CS to>Specified Coord Sys。

命令: DSYS。

改变显示坐标系将影响图形显示,除非要求特殊的图形显示;否则必须在执行任何图形显示命令(如 NPLOT 或 EPLLOT 等)前重新设置显示坐标系为全局笛卡儿坐标系。

5. 节点坐标系

全局或局部坐标系确定几何项的位置,节点坐标系确定各节点的自由度方向及节点计算结果的定位。每个节点都有其自己的节点坐标系,默认方式下,其平行于全局笛卡儿坐标系(忽略定义节点所在的活动坐标系)。可以通过下列方法在任一节点旋转节点坐标系直到满足所需的方位。

(1) 旋转节点坐标系到当前活动坐标系。

GUI: Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>Rotate Node CS>To Active CS。

Main Menu>Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Rotate Node CS>To Active CS。

命令: NROTAT。

(2) 通过命令 N 在生成一个节点时定义旋转角或通过命令 NMODIF 指定旋转角。

GUI: Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>In Active CS。

命令: N。

GUI: Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>Rotate Node CS>By Angles。

Main Menu>Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Rotate Node CS>By Angles。

命令: NMODIF。

(3) 通过方向余弦分量旋转坐标系。

GUI: Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Nodes>Rotate Node CS>By Vectors。

Main Menu>Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Rotate Node CS>By Vectors。

命令: NANG。

还可以通过执行以下命令列出节点坐标系的旋转角(相对于全局笛卡儿坐标系):

GUI: Utility Menu>List>Nodes。

Utility Menu>List>Picked Entities>Nodes。

命令: NLIST。

6. 单元坐标系

单元坐标系用来定位材料及单元计算结果数据。每个单元施加的载荷及计算结果(如应力、应变等)方向满足右手准则的单元坐标系。大多数的单元坐标系默认方位都符合下列模式:

(1) 线单元的 X 轴指向通常为从节点 I 到节点 J。

(2) 壳单元有其 X 轴指向为节点 I 到节点 J, Z 轴指向为壳单元表面的法向(满足右手准则), Y 轴指向垂直 XZ 平面。

(3) 对于 2D 和 3D 实体单元,单元坐标系通常平行于全局笛卡儿坐标系。

多种单元类型有关键点选项(KEYOPTS),允许用户改变默认的单元坐标系的方位。对于面或体单元,也可通过执行以下命令改变单元坐标系的方位:

GUI: Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>Default Attrs。

Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes。

命令: ESYS。

如果同时指定 KEYOPTS 和 ESYS, 则忽略 ESYS。

7. 结果坐标系

结果坐标系用来转换节点或单元的计算结果数据到一个特殊的坐标系中, 以进行显示或一般的后处理操作。结果数据为求解过程中计算的数据, 包括位移、梯度、应力和应变等。这些数据保存在数据库和结果文件中, 坐标系为节点或单元坐标系。结果数据通常转换为活动结果坐标系(默认方式为全局笛卡儿坐标系)显示、列表和单元表格数据的保存(ETABLE 命令)。

可以改变当前结果坐标系为其他坐标系(如全局坐标系或局部坐标系), 或求解过程中使用的坐标系(节点或单元坐标系)。如果在后续过程中显示和操作这些结果数据, 则结果坐标系首先被转换。可以通过执行以下命令改变结果坐标系:

GUI: Main Menu>General Postproc>Options for Output。

命令: RSYS。

3.1.3 工作平面

光标在屏幕上是一个点, 在空间实际上代表一条直线。为了用光标拾取一个点, 必须要有一个假想的平面与该直线相交, 这样才能唯一地确定空间中的一个点, 该平面即为工作平面。由于光标在平面上任意移动, 因此工作平面如同在上面写字的平板一样。

工作平面是一个无限大的平面, 也有原点、2D 坐标系, 捕捉增量和显示栅格。在同一时刻只能定义一个工作平面(即定义一个新的工作平面时删除已有工作平面), 工作平面与坐标系无关, 是独立的, 如工作平面与激活的坐标系可以有不同的原点和旋转方向。

进入 ANSYS 后, 系统有一个默认的工作平面。即总体笛卡儿坐标系(也称为直角坐标系)的 XY 平面, 工作平面的 WX、WY 轴分别取为总体笛卡儿坐标系的 X 轴与 Y 轴。

1. 使用工作平面

用户可以通过下列 5 种方法之一定义一个新的工作平面。

(1) 由 3 点定义一个工作平面, 命令如下:

GUI: Utility Menu>Work Plane>Align WP with>XYZ Locations。

命令: WPLANE。

(2) 由 3 个节点定义一个工作平面, 命令如下:

GUI: Utility Menu>Work Plane>Align WP with>Nodes。

命令: NWPLAN。

(3) 由 3 个关键点定义一个工作平面, 命令如下:

GUI: Utility Menu>Work Plane>Align WP with>Keypoints。

命令: KWPLAN。

(4) 由经过一指定线上的点与视平面定义一个工作平面, 命令如下:

GUI: Utility Menu>Work Plane>Align WP with>Plane Normal to Line。

命令: LWPLAN。

(5) 通过现有坐标系的 XY 平面来定义工作平面, 命令如下:

GUI: Utility Menu>Work Plane>Align WP with>Active Coord Sys。

Utility Menu>Work Plane>Align WP with>Global Cartesian。

Utility Menu>Work Plane>Align WP with>Specified Coord Sys。

命令：WPCSYS。

显示工作平面及其状态的命令如下：

GUI：Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane。

命令：WPSTYL。

获得工作平面状态（即位置、方向和增量）的命令如下：

GUI：Utility Menu>List>Status>Working Plane 命令。

命令：STAT。

2. 移动工作平面

用户可以利用下列 4 种方法之一来平移工作平面到一个新的原点：

(1) 移动工作平面原点到关键点位置，命令如下：

GUI：Utility Menu>Work Plane>Offset WP to>Keypoints。

命令：KWPAVE。

(2) 移动工作平面原点到节点位置，命令如下：

GUI：Utility Menu>Work Plane>Offset WP to>Nodes。

命令：NWPAVE。

(3) 移动工作平面原点到指定点位置，命令如下：

GUI：Utility Menu>Work Plane>Offset WP to>Global Origin。

Utility Menu>Work Plane>Offset WP to>Origin of Active CS。

Utility Menu>Work Plane>Offset WP to>XYZ Locations。

命令：WPAVE。

(4) 平移工作平面一定的增量，命令如下：

GUI：Utility Menu>WorkPlane>Offset WP by Increments。

命令：WPOFFS。

3. 旋转工作平面

在平面内同时旋转工作平面的 X 和 R 坐标轴或旋转整个工作平面到新的位置（如果不清楚旋转角度，可以重新定义一个新的工作平面更简单）。旋转工作平面的命令如下：

GUI：Utility Menu>WorkPlane>Offset WP by Increments。

命令：WPROTA。

4. 增强工作平面

用 WPSTYL 命令或 GUI 方式可增强工作平面的功能，使其具有捕捉增量、显示栅格、恢复容差和坐标类型功能。然后可迫使用户坐标系随工作平面移动，命令如下：

GUI：Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Global Cartesian。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Global Cylindrical。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Global Spherical。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Specified Coordinate Sys。

Utility Menu>Work Plane>Change Active CS to>Working Plane。

Utility Menu>Work Plane>Offset WP to>Global Origin。

命令：CSYS。

3.1.4 实体模型

有自底向上建模和自顶向下建模两种方法。

1. 自底向上（自下而上）建模

首先定义关键点，然后利用关键点定义较高级的实体图元（即线、面和体）。同时，自底向上构造的有限元模型在当前激活的坐标系内定义。点、线、面和体间的关系，顶点为关键点、边为线、表面为面，而整个物体内部为体。这些图元的层次关系，最高级的图元体以面为边界，面以线为边界，线以关键点为端点。

2. 自顶向下（自上而下）建模

生成一种体素时，ANSYS 自动生成所有从属于该体素的较低级图元，这种开始就从较高级的实体图元构造模型的方法即自顶向下的建模方法。

自底向上和自顶向下的建模技术可自由组合，因此对同一个模型，不同用户的建模过程可能不同。注意几何体素在工作平面内创建，自底向上方法在当前激活的坐标系中建模。

3.1.5 有限元模型

有限元模型的主要要素是节点、单元、实常数、材料的属性、边界条件和载荷，该模型由简单的单元组成，单元间通过节点连接并承受一定的载荷。节点的自由度个数与所求解的物理模型有关，单元分为点单元、线单元、面单元和体单元。建立实体模型后，定义单元属性（单元类型、实常数和材料属性）及网格控制（控制网格密度），然后生成网格，为施加边界条件、载荷和求解做好准备。

1. 划分网格的工具栏

执行下列命令打开如图 3-1 所示的划分网格工具栏：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Tool。

使用该工具栏中可执行的操作包括控制 Smart Size 水平、设置单元尺寸控制和单元形状、指定网格划分类型（自由或映射）、对实体模型图元划分网格，以及清除和细化网格等。

2. 单元属性

单元属性是指划分网格前需要指定的分析对象的特征，主要包括以下三个方面：

(1) 单元类型（Element Type）。ANSYS 单元库中有 100 多种单元类型，要根据分析问题的物理性质选择单元，单元一旦选定，则分析问题的物理环境随之确定。定义单元类型的命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Element Type> Add/Edit/Delete。

命令: ET。

(2) 实常数（Real Constants）。实常数是指某一单元的补充几何特征，如壳单元的厚度、梁的横截面积和惯性矩等，设置实常数的命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Real Constants。

命令: R。

(3) 材料属性（Material Attributes）。在所有分析中都要输入材料

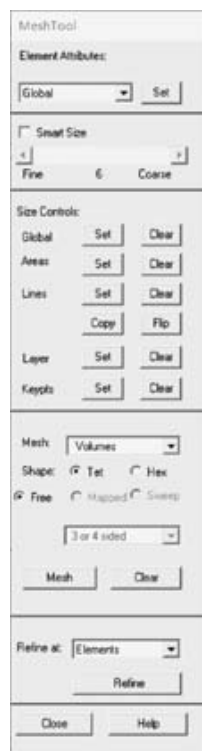


图 3-1 划分网格工具栏

属性，材料属性根据分析问题的物理环境不同而不同，如在结构分析中必须输入材料的弹性模量及泊松比，在热分析中必须输入热导率等。如果在分析中要考虑重力和惯性力，则必须要输入材料的密度等。定义材料属性的命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Material Props>Material Models。

命令: MP 和 TB。

为方便用户输入材料属性，ANSYS 定义了 100 多种材料模型，只要按照模型格式输入相关数据即可。由于除磁场分析外，在输入数据时用户不需要指示 ANSYS 所用单位，因此要注意单位，确保所有输入值的单位保持统一。单位影响输入的实体模型尺寸、材料属性、实常数及载荷等。

生成节点和单元网格前，用户必须定义合适的单元属性。建立属性表后即可通过指向表中合适的项目为模型的不同部分分配单元属性，方法如下：

1) 为关键点预置单元属性，命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>All Keypoints。

Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>Picked KPs。

命令: KATT。

2) 为线预置单元属性，命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>All Lines。

Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>Picked Lines。

命令: LATT。

3) 为面预置单元属性，命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>All Areas。

Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>Picked Areas。

命令: AATT。

4) 为体预置单元属性，命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>All Volumes。

Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>Picked Volumes。

命令: VATT。

利用总体属性设置，在生成模型时系统将从列表中给出实体模型和单元分配属性，直接分配给实际模型图元的属性将取代默认的属性。清除实体模型图元的节点和单元时，也删除任何通过默认属性分配的属性，命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attributes>Default Attribs。

Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Elements>Elem Attributes。

命令: TYPE、REAL、MAT、ESYS 和 SECNUM。

如果为属性赋值错误或将模型从一个分析环境转换到另一个分析环境，则需要修改定义的单元属性，方法如下：用网格清除命令清除网格，然后用与属性相关的命令，诸如 TYPE 或 REAL 等命令重新设置。如果网格本身是可接受的，则不要使用这种方法。选择要修改的单元后重新设置属性，命令如下：

GUI: Main Menu>Preprocessor>Modeling>Move/Modify>Element>Modify Attrib。

命令: EMODIF。

上述命令不影响相应的实体模型属性，但也不显示任何警告信息，所以使用时必须小心，否则会产生一些意想不到的结果。修改在属性表中的图元属性，但必须要在网格划分后和进入 SO-

LUTION 前。如果 REAL 和 MAT 设置中包含不能修改的项目，则显示一个警告。

3. 划分密度

网格划分密度过于粗糙，结果可能包含严重的错误；但过于细致，将花费过多的计算时间，浪费计算机资源，而且可能导致不能运行，因此在生成模型前应考虑网格密度问题。为合理划分有限元分析中的网格，可求助以下技术：

(1) 利用自适应网格划分产生可满足能量误差估计准确的网格（只适用于线性结构静力或稳态热问题，可接受的误差水平依据用户的分析要求），自适应网格划分需要实体建模。

(2) 与先前独立得出的试验分析或已知解析解相比较，对已知和算得结果偏差过大处进行网格细化。对所有四面体组成的面或体网格可用 NREFINE、EREFINE、KREFINE、LREFINE 和 AREFINE 或 Main Menu>Preprocessor>Meshing>Modify Mesh>Refine At 命令进行局部网格细化。

(3) 执行一个认为是合理网格划分的初始分析，然后在危险区域利用两倍多网格重新分析并比较结果。如果近似，则网格足够；否则，应继续细化网格。

(4) 如果细化网格测试显示只有模型的一部分需要更细的网格，可以对模型进行子建模以放大危险区域。

4. 划分方法

(1) 自由网格划分。无单元形状限制，网格也不遵循任何模式，适合于复杂形状的面和体网格划分。自由网格划分生成的单元尺寸依赖于 DESIZE、ESIZE、KESIZE 和 LESIZE 的当前设置，如果 Smart Size 打开，则由单元尺寸 SMARTSIZE 及 ESIZE、KESIZE 和 LESIZE 决定。所有的网格划分均由 Main Menu>Preprocessor> Meshing>Mesh Tool 或 Main Menu>Preprocessor>Meshing>Size Cntrls 命令生成。

(2) 映射网格划分。要求面或体形状规则，即必须要满足一定准则，并且生成的单元尺寸依赖于当前 DESIZE、ESIZE、KESIZE、LESIZE 和 AESIZE 的设置。

1) 面接受映射网格划分时，必须满足下列条件：

① 面必须是 3 或 4 条边。

② 面的对边必须划分为相同数目的单元。

③ 面如有 3 条边，则划分的单元必须为偶数且各边单元数相等。

④ 网格划分必须设置为映射网格，结果得到全部四边形单元或三角形单元的映射网格，依赖于当前单元类型和单元形状的设置。

⑤ 如果需要生成映射三角形网格，则默认为以系统所用模式生成三角形单元网格。

2) 将体映射网格划分为六面体时必须满足下列条件：

① 该体的外形应为块状（即有 6 个面）、楔形或棱柱（5 个面）或四面体。

② 体的对边必须划分相同的单元数或分割符合过渡网格形式适于六面体网格划分。

③ 如果体是棱柱或四面体，三角形面上的单元分割数必须是偶数。

3) 组成体的面数超过上述条件限制时，需减少面数以进行映射网格划分，可以对面进行加或连接操作。如果连接面有边界线，则线必须连接在一起，必须连接面后连接线。

(3) 体扫掠。可从一边界面网格扫掠贯穿整个体（该体必须存在且未划分网格）生成体单元。如果源面网格由四边形网格组成，则生成六面体单元；如果面由三角形网格组成，则生成楔形单元；如果面由三角形和四边形单元组成，则体由楔形和六面体单元共同填充。扫掠的网格与体密切相关，结果为体扫掠网格。

3.2 建立复杂有限元模型

ANSYS 软件虽然本身具有建模功能，但它的功能还不够强大。因此，设置了与多种 CAD 软件如 Pro/E、UG、AutoCAD 等的数据库交换接口。通过这个接口，可以把模型直接传入 ANSYS 中，然后进行网格划分，加载求解等过程，此种方法适用于一些复杂的三维实体模型，在 ANSYS 软件不容易构建成功的情况下。下面以实例说明用 UG 和 Pro/E 构建 ANSYS 复杂模型的方法。

UG 是美国 EDS 公司开发的著名的 3D 产品开发软件，由于其强大的功能，已逐渐成为当今世界最为流行的 CAD/CAM/CAE 软件之一，广泛应用于通用机械、模具、家电、汽车及航天领域。UG 下的模型传入 ANSYS 的方法为：在 UG 下对复杂对象建模，导出为 “.prt” 文件，然后从 ANSYS 文件菜单中导入。

Pro/E 是美国 PTC 公司开发的大型 CAD/CAE/CAM 软件，它具有强大的建模功能，尤其是对一些曲面较复杂的模型。下面介绍怎样将 Pro/E 的模型传入 ANSYS 中。

1. 第一种方法

将在 Pro/E 中画好的模型导出为 IGES 格式，即 File>Export>Model，选择 IGES，从 ANSYS 中导入 IGES 格式，即 Import>IGES。选择刚刚保存好的 IGES 文件打开即把 Pro/E 模型调入了 ANSYS，然后进行网格划分，就得到了 ANSYS 有限元模型。

2. 第二种方法

首先要把两种软件连接起来，一般来说，Pro/E 和 ANSYS Workbench 的连接操作过程如下：

(1) 在同机的同一操作系统下安装 Pro/E 和 ANSYS 两种软件。

(2) 保证上述两种软件的版本兼容，Pro/E 的版本不得高于同期的 ANSYS 的版本。执行开始>程序>ANSYS18.0>Utilities>CAD Configuration Manager 18.0，出现【ANSYS CAD Configuration Manager 18.0】对话框如图 3-2 所示，单击“CAD Selection”一栏，然后选中“Workbench and ANSYS Geometry Interfaces”，在右面对话框中勾选“Creo Parametric (Pro/Engineer)”中的“Workbench Associative Interface”设置如图 3-3 所示；单击“Creo Parametric”一栏，给出“Pro/Engineer Installation Location”和“Pro/Engineer Start Command”，选择 Pro/Engineer 的安装目录如图 3-4 所示，单击“CAD Configuration”，然后单击“Configure Selected CAD Interfaces”，如图 3-5 所示，关联与配置到此完成。

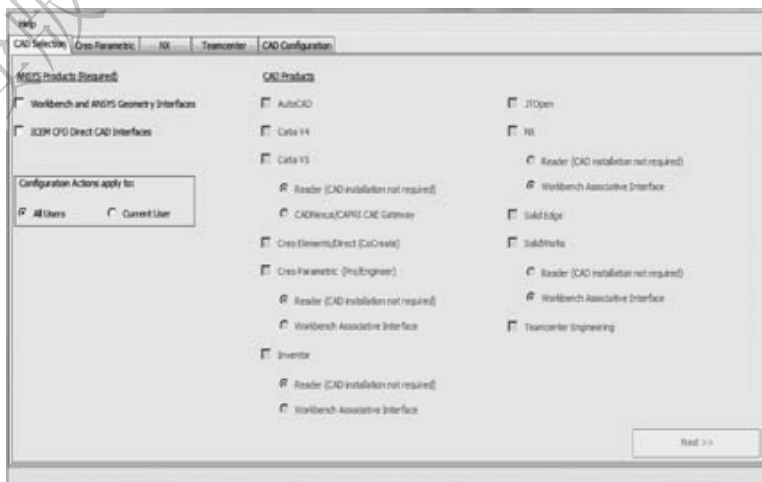


图 3-2 【ANSYS CAD Configuration Manager 18.0】对话框



图 3-3 【ANSYS CAD Configuration Manager 18.0】对话框“CAD Selection”选项卡

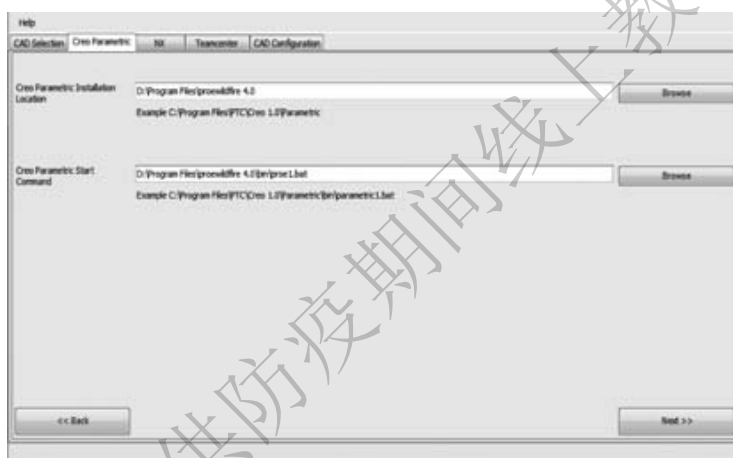


图 3-4 【ANSYS CAD Configuration Manager 18.0】对话框“Creo Parametric”选项卡

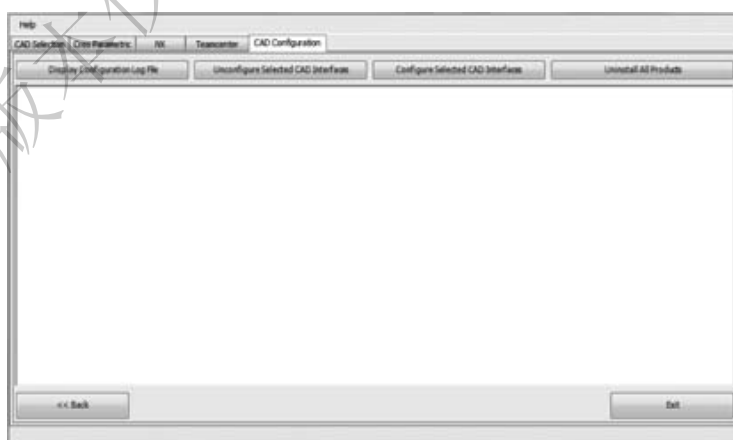


图 3-5 【ANSYS CAD Configuration Manager 18.0】对话框“CAD Configuration”选项卡

(3) 运行 Pro/Engineer 并进行 config.pro 配置，如表 3-1 所示。创建一个新零件，在菜单栏下出现“ANSYS 18.0”菜单，此时单击“Workbench”菜单，Pro/E 会自动开启 ANSYS Workbench 程序。

(4) 在 ANSYS Workbench 中会自动把该 .prt 文件调入。

表 3-1 config.pro 配置

名称	值	名称	值
fem_ansys_annotatons	Yes	fem_which_ansys_solver	Frontal
fem_ansys_grouping	Yes	femansys_annotatons	Yes
fem_default_solver	Ansys	pro_ansys_path	路径名

3.3 连接板建模实例

问题描述

连接板模型如图 3-6 所示。两个圆孔的半径和倒角的半径都是 0.4m，两个半圆的半径都是 1.0m，板厚为 0.5m（注意：只要各量采用统一的单位制度，有单位与否，不影响计算结果）。

操作步骤

1. 创建矩形

(1) 执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions 命令，弹出的对话框如图 3-7 所示。

其中，X1, X2 是矩形相对于原点坐标左右两个边的 X 轴坐标值，Y1, Y2 是矩形相对于原点坐标上下两个边的 Y 轴坐标值。当然，也可以通过别的方法来定义这个矩形，例如先创建关键点、线，然后由线定义矩形。效果都是一样的，两者也可以混合起来建模。建议不到万不得已不要轻易采用混合法，因为那样容易在改正错误模型时删掉线、面，但是没有删掉线上的点、面上的线。

(2) 输入如下数值（仅作参考）：“X1=0, X2=6, Y1=-1, Y2=1”，单击 **Apply**。

(3) 输入第二个矩形的坐标数值：“X1=4, X2=6, Y1=-1, Y2=-3”，单击 **OK** 关闭该对话框。

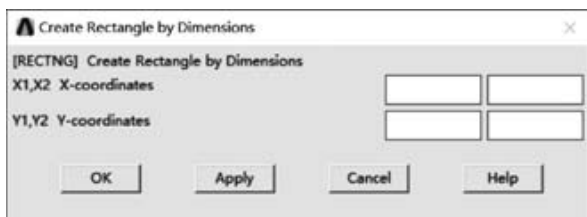


图 3-7 【Create Rectangle by Dimensions】对话框

2. 改变画法，重画该图形

(1) 执行 Utility Menu>PlotCtrls>Numbering 命令，弹出对话框如图 3-8 所示。

(2) 打开 Area numbers。在 “[/REPLOTT]/Replot upon OK/Apply?” 下拉列表框中选择为 “Replot”，这样 ANSYS 就会自动区分两个矩形，分别标上不同的颜色并重新画出图形。

(3) 保存图形。单击 “ANSYS Toolbar” 工具条（图 3-9）中的 **SAVE DB**。将上述图形保存在 “file.db” 中。建议用 Utility Menu>File>Save as 存为 “connectingplate.db” 文件。

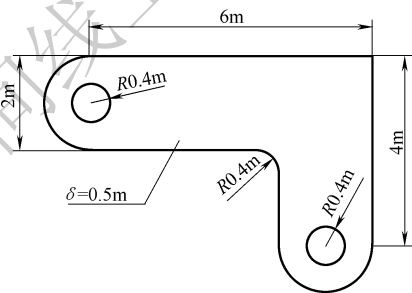


图 3-6 连接板模型

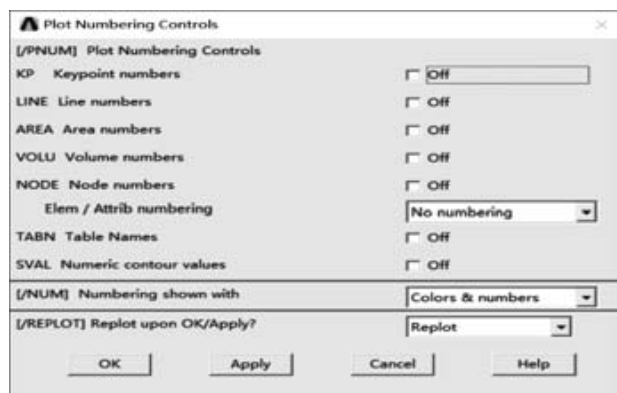




图 3-8 【Plot Numbering Controls】对话框





图 3-9 ANSYS Toolbar

3. 将工作平面转换到极坐标下，创建半圆

(1) 执行 Utility Menu>Plot Ctrl>Pan Zoom Rotate 命令。单击有小点的按钮（该按钮的功能是按比例缩小，另一个有大圆点的按钮则是放大功能），将图形缩小，关闭该对话框。或单击图形窗口右边的  与  图标调整其大小，或单击其他按钮调整其位置或视角。



(2) 执行 Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane 命令。需要指出的是，单击该条命令之后，并不会弹出什么窗口，用户所能看到的只是该条命令前面有一个被选中的符号而已。但是执行该命令之后，ANSYS 就会向你展示工作平面坐标系（Working Plane，它是一个 2D 作图平面，主要用于实体模型的定向和定位）。

(3) 执行 Utility Menu>Work Plane>WP Settings 命令。在 Cartesian（笛卡儿坐标）和 Polar（极坐标）中间选择 Polar 作为工作平面，显而易见，这只是为了更方便地创建圆孔，并没有别的意思。

同样在 Grid only、Grid and Triad 和 Triad only 之中选择 Grid and Triad。其中 Grid 是栅格之意，通过展示栅格，用户可以看到工作平面的方向，Triad 是用来确定工作平面的坐标原点，它总是处于原点并随着工作平面的移动而移动。这里选择 Grid and Triad 则是同时使用这两个功能。在 Snap Increment 中设置“0.05”，单击  关闭该对话框。Snap Increment 命令只有在 Enable Snap 激活的情况下才能使用。用户如果想知道关于该选项的具体的说明，直接单击菜单下面的 ，获得在线帮助。

整个 WP Settings 窗口各选项如图 3-10 所示。

(4) 执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Circle>Solid Circle 命令。创建圆心为 (0, 0)，半径为 1 的圆。可以用键盘输入，也可以用鼠标移动得到。键盘输入的窗口如图 3-11 所示。

(5) 单击  按钮关闭该对话框，单击 ANSYS Toolbar 上的  图标存盘。

4. 创建第二个半圆

(1) 执行 Utility Menu>WorkPlane>Offset WP to>Keypoints 命令。将鼠标分别移动到第二个矩

形的左右两端，选作关键点。单击 **OK** 按钮离开该对话框。这一步是将原来的工作平面转换一下，其中“Offset WP to Keypoints”的含义是将原来工作平面的原点转换到由“Keypoints”决定的原点上。执行这一步之后，可以看到原来的【ANSYS Input】对话框发生了变化。而且 ANSYS 会弹出一个【Offset WP to Keypoints】窗口，如图 3-12 所示。这时，将鼠标移动到图形界面上，分别选取右侧矩形的左右两个点作为关键点（Keypoints）。然后，单击图 3-12 上面的 **OK** 按钮，则工作平面（极坐标）移动到了以所取关键点连线的中点为原点的平面上。



图 3-10 工作平面设置

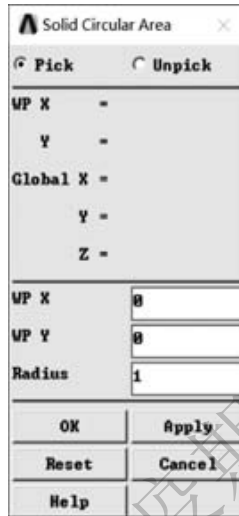


图 3-11 创建实心圆

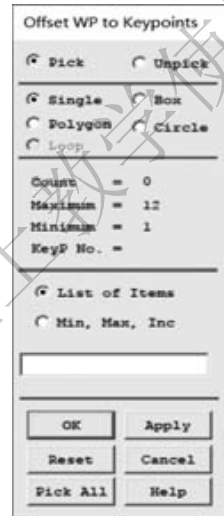


图 3-12 【Offset WP to Keypoints】对话框

(2) 执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Circle>Solid Circle 命令。创建圆心为 (0, 0)，半径为 1 的圆。可以用键盘输入，也可以用鼠标移动得到。单击 **OK** 按钮关闭该对话框，单击 ANSYS Toolbar 上的 **SAVE DB** 图标存盘。

5. 将面积和在一起

执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Add>Areas 命令，单击 **Pick All** 按钮将面积和在一起。在上述操作下程序弹出的对话框如图 3-13 所示。单击 **Pick All** 按钮之后，图形界面上的图形就融合在一起了。

6. 创建补丁面积，并把它们和在一起

(1) 执行 Utility Menu>PlotCtrls>Numbering 命令。弹出【Line Numbering】对话框。单击 **OK** 按钮关闭该对话框，如图 3-14 所示。该命令只是让 ANSYS 将图形中的线加以编号，方便以后的操作。

(2) 执行 Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane 命令。该命令用来关闭展示工作平面。

(3) 执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Line Fillet 命令。弹出【Line Fillet】对话框，单击选择 L17 和 L8，便出现如图 3-15 所示的【Line Fillet】对话框，将 L17 和 L8 两条线的标号 17、8 输入，并设置半径为“0.4”，单击 **OK** 按钮关闭该对话框。

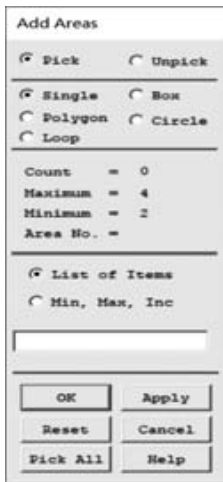


图 3-13 【Add Areas】对话框

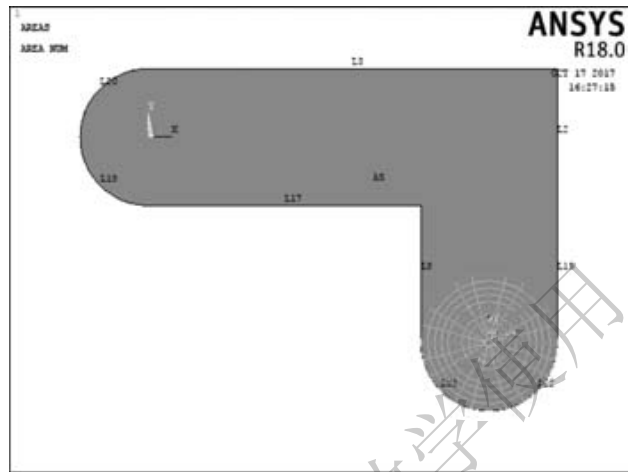


图 3-14 显示直线编号

(4) 执行 Utility Menu>Plot>Lines 命令，再执行 Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate 命令。单击 **Zoom** 按钮（该命令用于放大所选择的图元），将鼠标移到要打补丁的区域，按左键不放，移动鼠标并再次单击，得到放大的三条线图形，如图 3-16 所示。

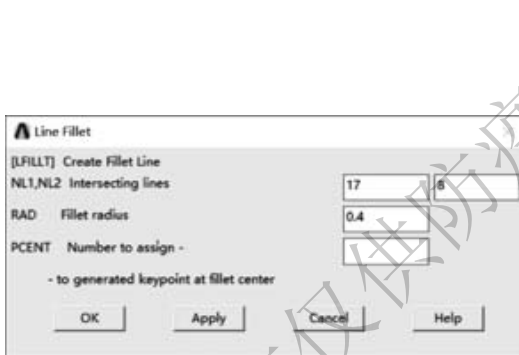


图 3-15 在关键点之间填充线

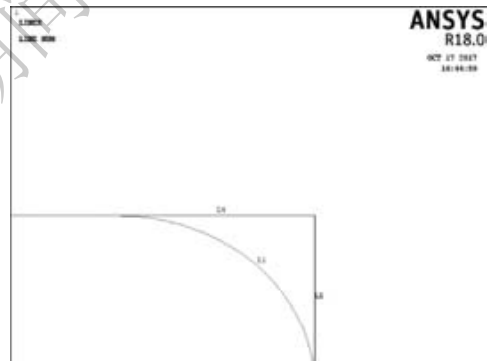


图 3-16 放大的三条线图形

(5) 执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>By Lines 命令。用鼠标选择 L1、L4、L5 三条线，单击 **OK** 按钮关闭对话框。单击“Pan-Zoom-Rotate”上的 **Fit** 按钮，并关闭对话框。

(6) 执行 Utility Menu>Plot>Areas 命令并存盘。

(7) 执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Add>Areas 命令。选择 **Pick All** 按钮，单击 **OK** 按钮关闭对话框并进行存盘。此时图形界面上的图形如图 3-17 所示。

7. 创建两个小圆孔

(1) 执行 Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane 命令，再执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Circle>Solid Circle 命令，与上面所提到的方法相同，创建一个圆心为 (0, 0)，半径为 0.4 的小圆孔。所得图形如图 3-18 所示。

(2) 执行 Utility Menu>Work Plane>Offset WP to>Global Origin 命令，再执行 Main Menu>Pre-

processor> Modeling>Create>Areas>Circle>Solid Circle 命令，创建另一个圆心为 (0, 0)，半径为 0.4 的小圆孔，并关闭对话框。所得图形如图 3-19 所示。

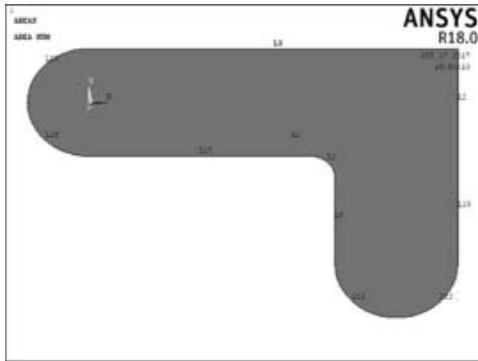


图 3-17 进行布尔加运算后的结果

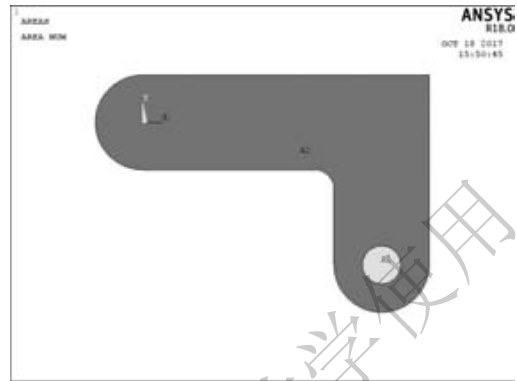


图 3-18 绘制 1 个实心圆

(3) 执行 Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane 命令，再执行 Utility Menu>Plot>Replot 命令。

8. 从支架中减去两个小圆孔，保存文件

执行 Main Menu>Preprocessor> Modeling>Operate>Subtract>Areas 命令。选取支架为基体 (base area from which to subtract)，单击 **Apply** 按钮；选取两个小圆孔作为被减去部分 (areas to be subtracted)，单击 **OK** 按钮。所得图形如图 3-20 所示。单击 **SAVE DB** 按钮保存文件。

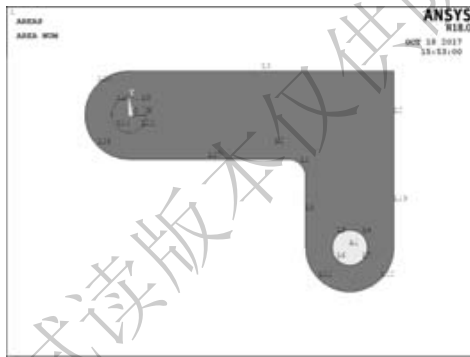


图 3-19 绘制 2 个实心圆

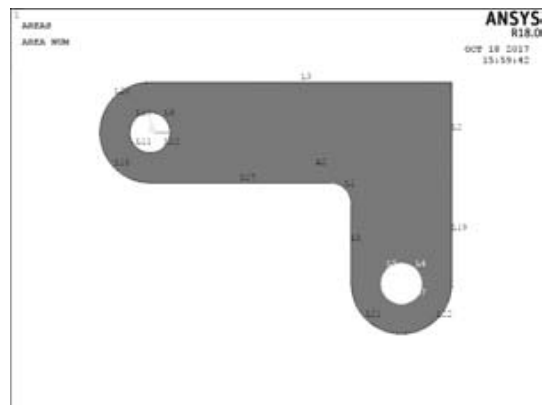


图 3-20 模型图

至此为止，经过 8 个步骤（主要是创建矩形、创建圆孔、创建补丁面积、将所有面积和在一起、创建两个小圆孔并从支架中减去两个小圆孔）建立起来了连接板几何模型，而且在这些步骤中间也顺便介绍了一些其他菜单的使用，如改变画法、重画所建图形以及将工作平面转换到极坐标下等。

需要说明的是，建模中经常使用 Utility Menu>Plot、Utility Menu>Plot Ctrls>Numbering 和 Utility Menu>Plot Ctrls>Pan Zoom Rotate 中的有关操作，使整个过程更为直观，但不会改变模型的数据，读者可随意或反复试验以掌握各种技巧。ANSYS 程序的菜单命令无比庞大，不可能也没有必要将所有这些命令一一加以说明。

3.4 轴类零件建模实例

由于轴类零件的整体结构与中心线对称，某些局部结构可能与中心线不对称，但在大多数情况下也与某个截面对称，所以可以考虑下列两种不同的建模方法：

(1) 用自顶向下的建模方法，即直接采用 3D 体素建模。

(2) 用自底向上的建模方法，即利用基本面素，采用绕中心线旋转面素或采用面素沿法向拉伸等。

问题描述

图 3-21 所示为某产品上的一根轴，下面将采用不同方法建立其几何实体模型。该轴为加工和安装设置了多个凹槽和凸台，在建模过程中可根据分析问题的性质取舍。特别是纯粹为加工方便而设置的凹槽和凸台在分析过程中完全可以不考虑。

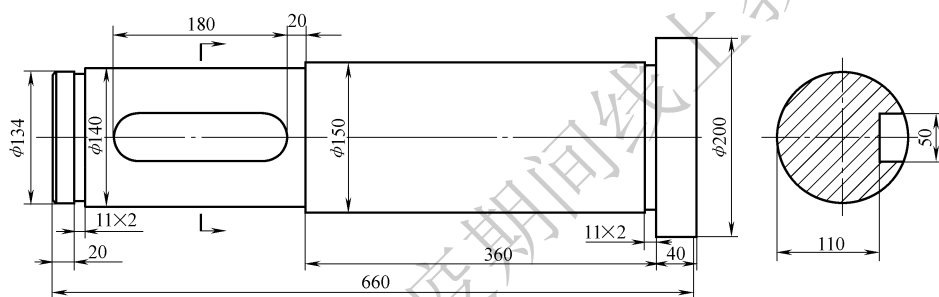


图 3-21 轴零件的 2D 平面示意图

3.4.1 自底向上建模

根据轴的对称性，本节利用面体素中的矩形形成一个平面，而后用这个平面绕其中心线进行旋转而生成轴体。

操作步骤

1. 定义工作文件名和工作标题

(1) 定义工作文件名：执行 Utility Menu>File>Change Jobname 命令，弹出如图 3-22 所示的【Change Jobname】对话框。输入“SHAFT1”并选择【New log and error files?】复选框后的 Yes，单击 **OK** 按钮。

(2) 定义工作标题：执行 Utility Menu>File>Change Title 命令，弹出如图 3-23 所示的【Change Title】对话框。输入“The Shaft Model”，单击 **OK** 按钮。



图 3-22 【Change Jobname】对话框



图 3-23 【Change Title】对话框

(3) 重新显示：执行 Utility Menu>Plot>Replot 命令。

2. 显示工作平面

(1) 显示工作平面：执行 Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane 命令。

(2) 关闭三角坐标符号：执行 Utility Menu>PlotCtrls>Window Controls>Window Options 命令，弹出如图 3-24 所示的【Window Options】对话框。在【Location of triad】下拉列表框中选择“Not shown”选项，单击 **OK** 按钮。

(3) 显示工作平面移动和旋转工具栏：执行 Utility Menu>Work Plane>Offset WP by Increments 命令，显示如图 3-25 所示的【Offset WP】工具栏，即工作平面移动和旋转工具栏。

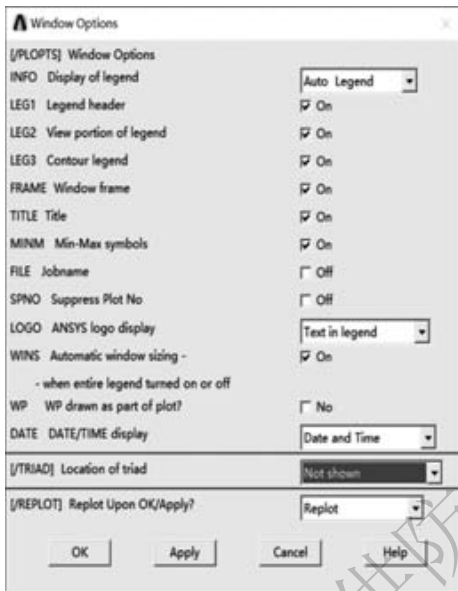


图 3-24 【Window Option】对话框

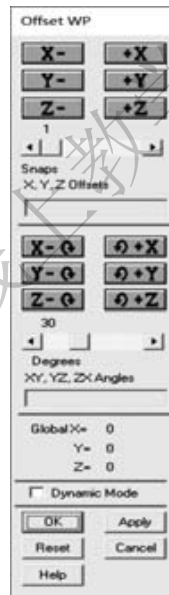


图 3-25 【Offset WP】工具栏

3. 利用矩形面素生成面

(1) 生成矩形面：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Rectangle>By Dimensions 命令，弹出如图 3-26 所示的【Create Rectangle by Dimensions】对话框。在“X-coordinates”和“Y-coordinates”文本框中分别输入“0, 260”及“0, 70”，单击 **Apply** 按钮；输入“260, 620”及“0, 75”，单击 **Apply** 按钮；输入“620, 660”及“0, 100”，单击 **OK** 按钮，矩形面的生成结果如图 3-27 所示。

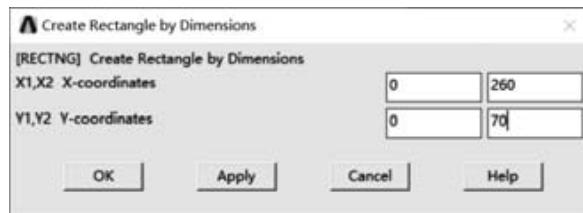


图 3-26 【Create Rectangle by Dimensions】对话框

(2) 矩形面相加操作：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans> Add>Areas



图 3-27 矩形面生成结果

命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，矩形面相加操作后的生成结果如图 3-28 所示。此时读者可随意试验 Utility Menu>Plot、Utility Menu>PlotCtrls>Numbering 和 Utility Menu>Plot Ctrls>Pan Zoom Rotate 中的有关操作。



图 3-28 矩形面相加操作后的生成结果

4. 由面绕轴线生成体

(1) 面绕轴线操作：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Extrude>Areas>About Axis 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，出现第 2 个拾取轴心线两端点的拾取框。分别拾取编号为 1 和 10 的关键点，单击 **OK** 按钮，弹出如图 3-29 所示的【Sweep Areas about Axis】对话框，单击 **OK** 按钮。

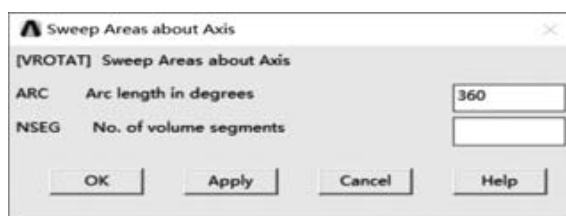


图 3-29 【Sweep Areas about Axis】对话框

(2) 显示旋转缩放工具栏：执行 Utility Menu>Plot Ctrls>Pan Zoom Rotate 命令，弹出如图 3-30 所示的【Pan-Zoom-Rotate】工具栏。单击 **IsO** 按钮，最后生成的实体模型如图 3-31 所示。

(3) 保存文件：执行 Utility Menu>File>Save As 命令，弹出【Save As】对话框。在【Save Database to】下拉列表框中输入文件名“Shaft_ Volu. DB”，单击 **OK** 按钮。将到目前为止的工作存到文件“Shaft_ Volu”中，以后仍然对文件“SHAFT1”进行操作。

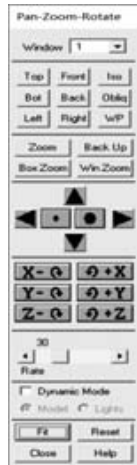


图 3-30 【Pan-Zoom-Rotate】工具栏

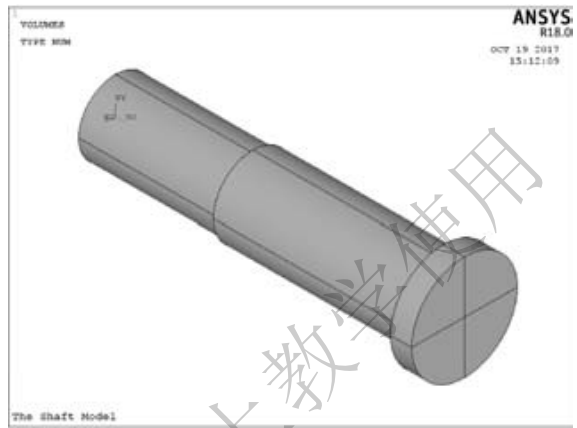


图 3-31 最后生成的实体模型

5. 生成键槽

(1) 移动工作平面：在【Offset WP】工具栏中的“X, Y, Z Offset”文本框中输入“85, 0, 40”，按回车键确认。

(2) 生成一个圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Cylinder>Solid Cylinder 命令，弹出如图 3-32 所示的【Solid Cylinder】对话框。在“Radius”和“Depth”文本框中分别输入“25”及“50”，单击 **OK** 按钮。

(3) 生成一个块：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Block>By Dimensions 命令，弹出【Create Block by Dimensions】对话框，如图 3-33 所示，在其中输入数据。

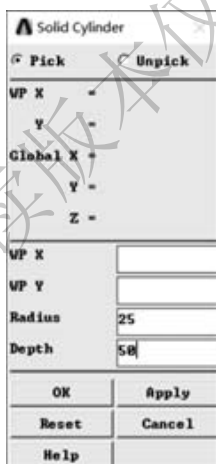


图 3-32 【Solid Cylinder】对话框

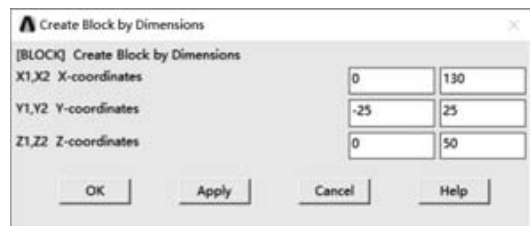


图 3-33 输入数据

(4) 移动工作平面：在【Offset WP】工具栏的“X, Y, Z Offset”文本框中输入“130, 0, 0”，按回车键确认。

(5) 生成第 2 个圆柱体：操作和生成第 1 个圆柱体一样，生成的实体如图 3-34 所示。

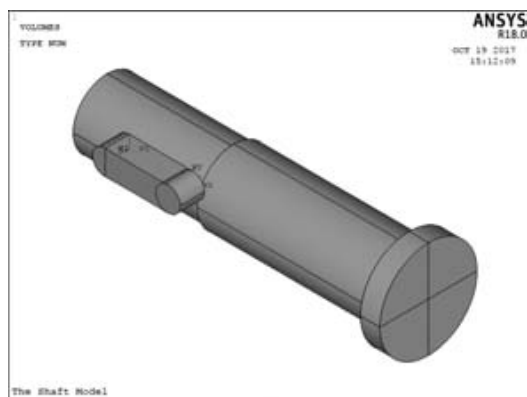


图 3-34 生成的实体

(6) 进行减操作：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Volumes 命令，弹出第 1 个拾取框。拾取编号为 V1 和 V2 的体素，单击 **OK** 按钮，弹出第 2 个拾取框。分别拾取编号为 V5、V6 和 V7 的体素，单击 **OK** 按钮。

(7) 体相加操作：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Add > Volumes 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮。

(8) 刷新显示：执行 Utility Menu > Plot > Replot 命令，生成结果如图 3-35 所示。

6. 生成有限元模型

轴类零件在生成有限元模型时，由于其结构的特殊性，要采用六面体单元相对难一些，最简单的方法是采用四面体单元。选择哪种四面体单元，则要根据分析问题的性质确定。

由于本节介绍操作过程，因此选择 SOLID92 单元作为例子进行说明。

(1) 选择单元类型：执行 Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete 命令，弹出如图 3-36 所示的【Element Types】对话框。

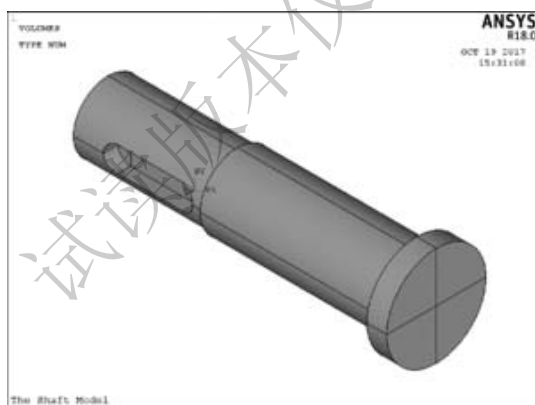


图 3-35 生成结果



图 3-36 【Element Types】对话框

(2) 单击 **Add...** 按钮，弹出如图 3-37 所示的【Library of Element Type】对话框。

(3) 选择“Structural Solid”和“Tet 10node 187”选项，单击 **OK** 按钮返回【Element Types】对话框。单击 **Close** 按钮，完成单元类型的选择。

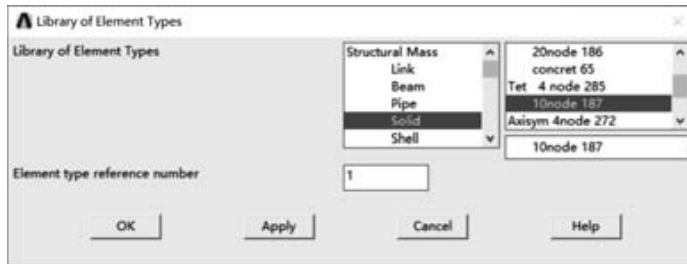


图 3-37 【Library of Element Type】对话框

(4) 设置单元尺寸：执行 Main Menu>Preprocessor>Meshing>Size Cntrl>Manual Size>Global>Size 命令，弹出如图 3-38 所示的【Global Element Sizes】对话框。在“Element edge length”文本框中输入“20”，单击 **OK** 按钮。



图 3-38 【Global Element Size】对话框

(5) 采用自由网格划分方式生成有限元网格：执行 Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh>Volumes>Free 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，生成的网格如图 3-39 所示。

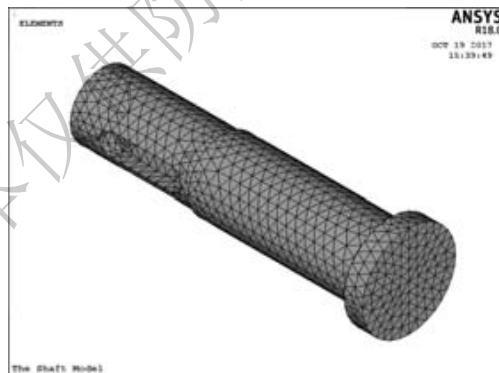


图 3-39 生成的网格

(6) 保存有限元模型数据件：执行 Utility Menu>File>Save As 命令，弹出【Save As】对话框。在【Save Database To】下拉列表框中输入文件名“T2-1. DB”，单击 **OK** 按钮。

3.4.2 自顶向下建模

根据轴的形状为圆柱类，因此在自顶向下建模的过程中要利用 ANSYS 中的体素，即圆柱。通过移动工作平面和生成体素相结合来生成轴零件模型，其操作步骤如下：

1. 定义工作文件名和工作标题

(1) 定义工作文件名：执行 Utility Menu>File>Change Jobname 命令，在弹出的【Change Job-

name】对话框中输入“SHAFT2”并选中【New log and error files】复选框，单击 **OK** 按钮。

(2) 定义工作标题：执行 Utility Menu>File>Change Title 命令，在弹出的【Change Title】对话框中输入“The Shaft Model”，单击 **OK** 按钮。

(3) 重新显示：执行 Utility Menu>Plot>Replot 命令。

2. 显示工作平面

(1) 显示工作平面：执行 Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane 命令。

(2) 关闭三角坐标符号：执行 Utility Menu>PlotCtrls>Window Controls>Window Options 命令，弹出【Window Options】对话框。在【Location of triad】下拉列表框中选择“Not Shown”选项，单击 **OK** 按钮。

(3) 执行 Utility Menu>Work Plane>Offset WP by Increments 命令，打开【Offset WP】工具栏。

3. 利用圆柱体素生成模型

(1) 执行 Utility Menu>PlotCtrls>Pan Zoom Rotate 命令，打开【Pan-Zoom-Rotate】工具栏，单击 **Iso** 按钮。

(2) 旋转工作平面：在 Offset WP 工具栏中的“XY, YZ, ZX Angle”文本框中输入“0, 0, 90”，按回车键确认。

(3) 生成第1个圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Cylinder>Solid Cylinder 命令，弹出【Solid Cylinder】对话框。在“Radius”和“Depth”文本框中分别输入“70”及“260”，单击 **OK** 按钮。

(4) 移动工作平面：在【Offset WP】工具栏中的“X, Y, Z Offsets”文本框中输入“0, 0, 260”，按回车键确认。

(5) 生成第2个圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Cylinder>Solid Cylinder 命令，在“Radius”和“Depth”文本框中分别输入“75”及“360”，单击 **OK** 按钮。

(6) 移动工作平面：在【Offset WP】工具栏中的“X, Y, Z Offsets”文本框中输入“0, 0, 360”，按回车键确认。

(7) 生成第3个圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Volume>Cylinder>Solid Cylinder 命令，在“Radius”和“Depth”文本框中分别输入“100”及“40”，单击 **OK** 按钮。

(8) 刷新显示：执行 Utility Menu>Plot>Replot 命令。

(9) 体相加操作：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Add>Volumes 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，最后生成结果如图 3-40 所示。

(10) 保存文件：执行 Utility Menu>File>Save As 命令，弹出【Save As】对话框。在【Save Database To】下拉列表框中输入文件名“T2-33.DB”，单击 **OK** 按钮。

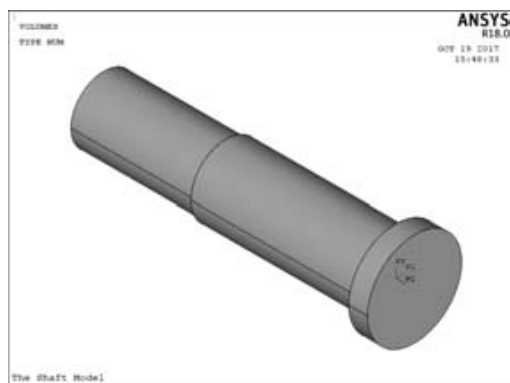


图 3-40 最后生成结果

4. 生成键槽

(1) 移动工作平面原点: 执行 Utility Menu>WorkPlane>Offset WP to>Global Origin 命令。

(2) 旋转工作平面在【Offset WP】工具栏中的“XY, YZ, ZX Angle”文本框中输入“0, 0, -90”, 按回车键确认。

生成键槽的方法可以参考 3.4.1 中的操作步骤。

3.5 圆柱齿轮建模实例

问题描述

图 3-41 所示为一个直齿圆柱齿轮的结构示意图, 图中数据单位为 mm, 结构参数为: 模数 $m=6\text{mm}$ 、齿数 $z=28$ 。建立有限元模型。

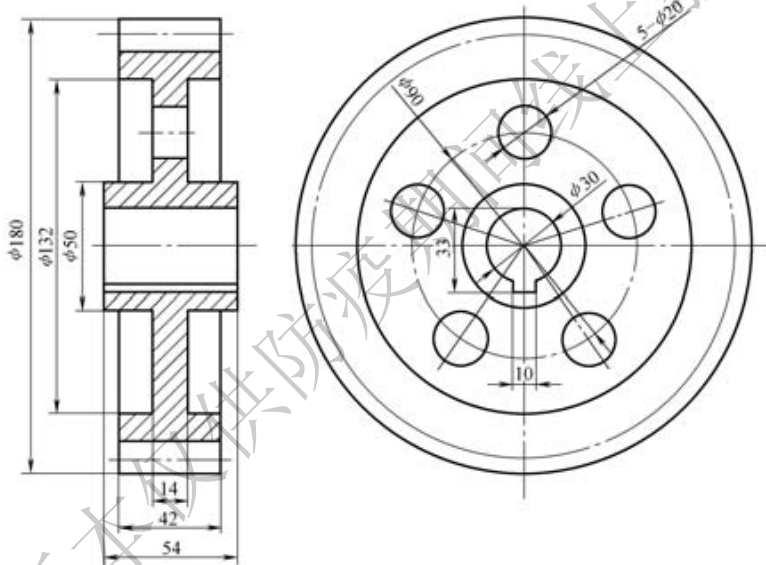


图 3-41 齿轮结构示意图

操作步骤

采用自底向上方式建模的操作步骤如下:

1. 定义工作文件名和工作标题

(1) 定义工作文件名: 执行 Utility Menu>File>Change Jobname 命令, 在弹出的对话框中输入“GEAR”并选择【New log and error files】复选框, 单击 **OK** 按钮。

(2) 定义工作标题: 执行 Utility Menu>File>Change Title 命令, 在弹出的对话框中输入“The gear model”, 单击 **OK** 按钮。

(3) 重新显示: 执行 Utility Menu>Plot>Replot 命令。

2. 显示工作平面

(1) 显示工作平面：执行 Utility Menu>Work Plane>Display Working Plane 命令。

(2) 关闭三角坐标符号：执行 Utility Menu>PlotCtrls>Window Controls>Window Options 命令，弹出一个对话框，在【Location of triad】下拉列表框中选择“Not Shown”选项，单击 **OK** 按钮。

(3) 打开【Offset WP】工具栏：执行 Utility Menu>Work Plane>Offset WP by Increments 命令。

(4) 打开【Pan-Zoom-Rotate】工具栏：执行 Utility Menu>Pan-Zoom-Rotate 命令，单击 **Iso** 按钮。

3. 生成齿面

(1) 在当前坐标系下生成关键点：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In Active CS 命令，弹出【Create Keypoints in Active Coordinate System】对话框。在“Keypoint number”和“Location in active CS”文本框中分别输入关键点的编号“1”及关键点的“X”“Y”和“Z”坐标值“5.428, 76.803, 0”。单击 **Apply** 按钮，生成第 1 个关键点。重复上述操作，依次输入“5.534, 77.803, 0”“5.595, 79.303, 0”“5.411, 80.82, 0”“5.110, 82.342, 0”“4.694, 83.869, 0”“4.208, 85.396, 0”“3.623, 86.92, 0”“2.928, 88.450, 0”“2.214, 89.972, 0”和“0, 90.00, 0”共 11 个关键点的编号及坐标值，最后生成结果如图 3-42 所示。

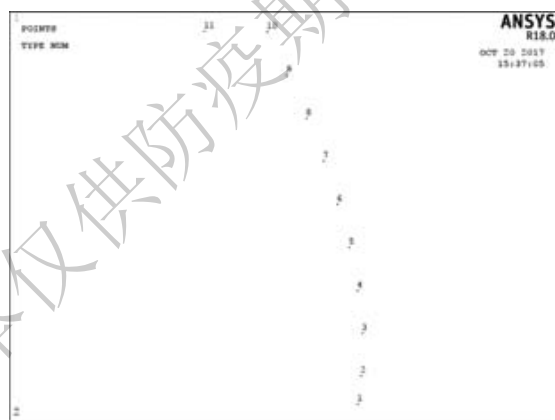


图 3-42 最后生成结果

(2) 连样条线：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Splines>Spline thru KPs 命令，弹出一个拾取框。依关键点的排列顺序拾取关键点 1~10，单击 **OK** 按钮，生成一条曲线，即齿轮的轮齿外轮廓线。

(3) 镜像生成另一边的轮廓线：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Reflect>Lines 命令，弹出一个拾取框。拾取样条线，单击 **OK** 按钮，弹出如图 3-43 所示的【Reflect Lines】对话框。单击 **OK** 按钮，生成结果如图 3-44 所示。

(4) 生成齿顶圆的圆弧线：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Arcs>Through 3 KPs 命令，弹出一个拾取框。按顺序依次拾取编号为 13, 10, 11 的关键点，单击 **OK** 按钮。

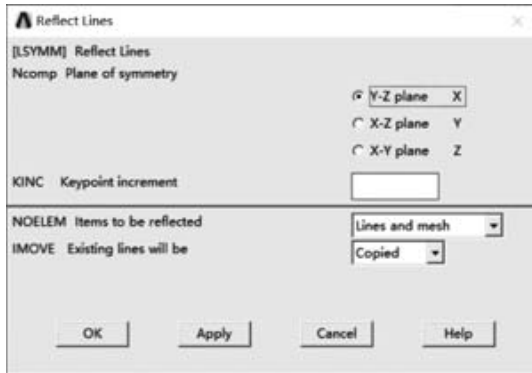


图 3-43 【Reflect Lines】对话框

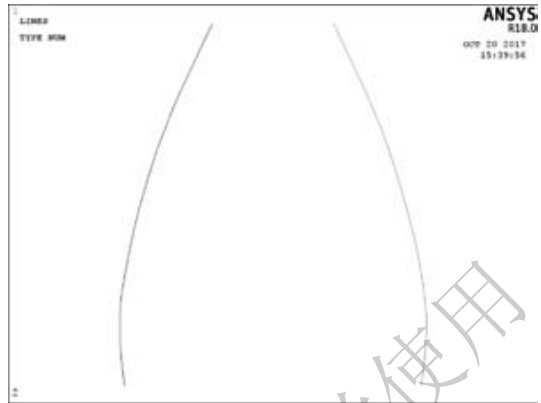


图 3-44 线镜像生成结果

(5) 输入参数：执行 Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters 命令，弹出【Scalar Parameters】对话框。在“Selection”文本框中输入“a = 360/28”，单击 **Accept** 按钮，再单击 **Close** 按钮。

(6) 生成一个圆环面：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Circle > Partial Annulus 命令，弹出【Part Annular Circ Area】对话框。如图 3-45 所示，输入数据，生成圆环面的结果如图 3-46 所示。

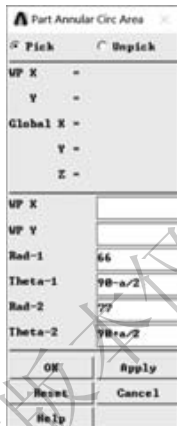


图 3-45 【Part Annular Circ Area】对话框

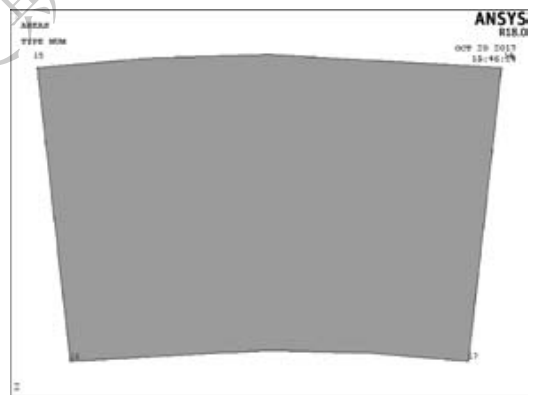


图 3-46 生成圆环面的结果

(7) 由关键点生成面：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Arbitrary > Through KPs 命令，弹出一个拾取框。依次拾取编号为 1, 10, 13, 12 的关键点，单击 **OK** 按钮。

(8) 面相加操作：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Add > Areas 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，面相加操作后的结果如图 3-47 所示。

(9) 改变当前坐标系为柱坐标系：执行 Utility Menu > WorkPlane > Change Active CS to > Global Cylindrical 命令。

(10) 复制生成整个齿圈：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Copy > Areas 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，弹出如图 3-48 所示的【Copy Areas】对话框，在“Number of copies”文本框中输入复制生成的个数 28，在“Y-offset in active CS”文本框中输入角度“a”。单击

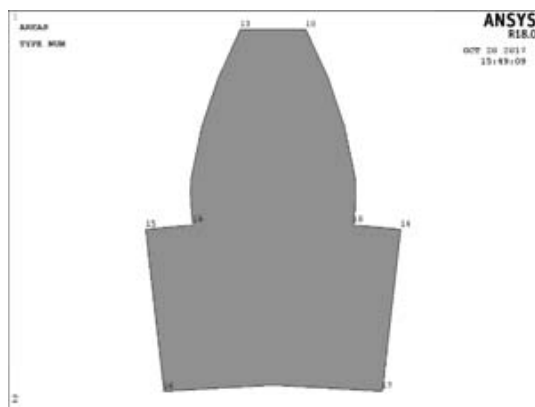


图 3-47 面相加操作后的结果

OK 按钮，生成结果如图 3-49 所示。



图 3-48 【Copy Areas】对话框

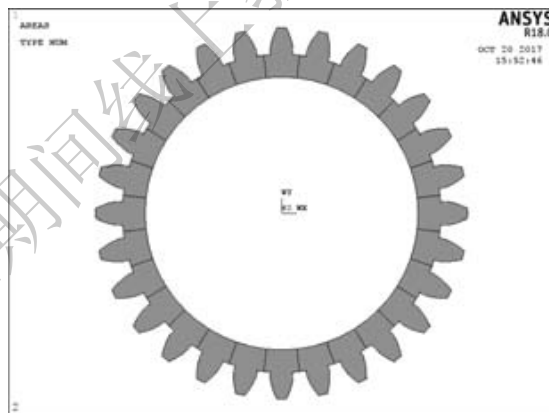


图 3-49 生成面的结果

(11) 面相加操作：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Add> Areas 命令，弹出一个拾取框，单击 **Pick All** 按钮。

4. 生成齿圈体

(1) 显示线：执行 Utility Menu>Plot>Line 命令。

(2) 将内圈的线连成一条线：执行 Main Menu> Preprocessor>Modeling>Operate> Booleans>Add> Lines 命令，弹出一个拾取框。依次拾取编号为 15、255、256、257、258、259、260、261、262、263、264、265、266、267、268、269、270、271、272、273、274、275、276、277、278、279、254（共 27 条，不是 28 条，因为线不能封闭）的线。单击 **OK** 按钮，弹出【Add Lines】对话框，单击 **Apply** 按钮。

(3) 将每个齿的齿底圆弧线相连：依次拾取编号为 1 和 225 的线，单击 **OK** 按钮，弹出【Add Lines】对话框。单击 **Apply** 按钮。重复上述操作过程，对齿底圆弧执行连线，生成齿圈体的结果如图 3-50 所示。

(4) 改变当前坐标系：执行 Utility Menu>WorkPlane>Change Active CS to>Global Cartesian 命令。

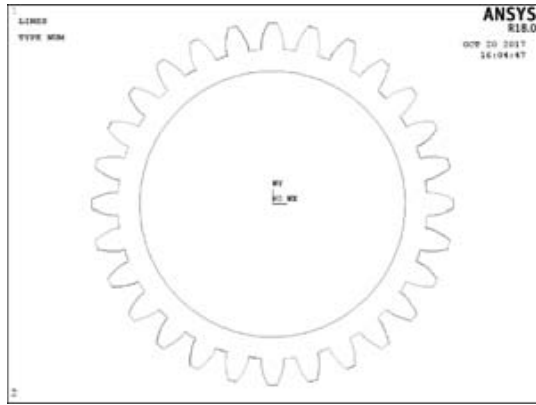


图 3-50 生成齿圈体的结果

(5) 沿面的法向拖动生成体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Extrude >Areas>Along Normal 命令，弹出一个拾取框。拾取面后单击 **OK** 按钮，弹出如图 3-51 所示的【Extrude Area along Normal】对话框，在“Length of extrusion”文本框中输入齿轮的宽度“42”。单击 **OK** 按钮，单击【Pan-Zoom-Rotate】工具栏中的 **Isop** 按钮，生成齿轮外圈的最后结果如图 3-52 所示。

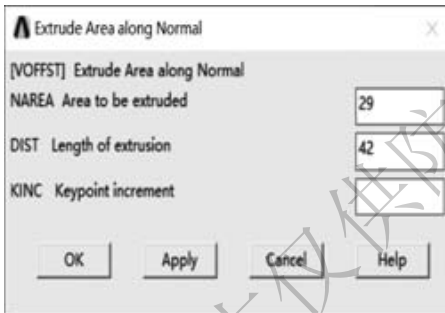


图 3-51 【Extrude Area along Normal】对话框



图 3-52 生成齿轮外圈的最后结果

5. 生成齿的支撑部分

(1) 平移工作平面：在【Offset WP】工具栏中的“X, Y, Z Offset”文本框中输入“0, 0, -6”后按回车键确认。

(2) 生成一个空心圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Cylinder>Hollow Cylinder 命令，弹出【Hollow Cylinder】对话框。如图 3-53 所示，输入数据，单击 **OK** 按钮。

(3) 体相加操作：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Add>Volumes 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，体相加操作的结果如图 3-54 所示。

(4) 改变视角方向：执行 Utility Menu>PlotCtrls>View Settings>Viewing Direction 命令，弹出一个对话框。在“Coords of viewpoint”文本框中输入“1, 1, -1”，单击 **OK** 按钮。

(5) 生成空心圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Cylinder>Hollow Cylinder 命令，弹出【Hollow Cylinder】对话框。在“Rad-1”“Rad-2”和“Depth”文本框中分别

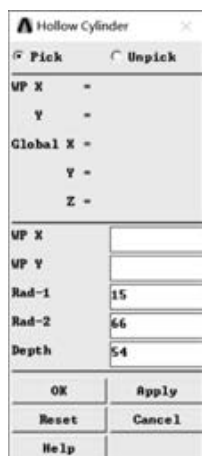


图 3-53 输入数据

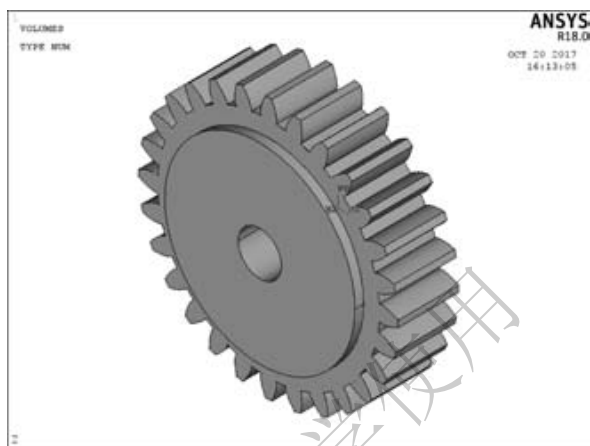


图 3-54 体相加操作的结果

输入“25”“66”及“20”，单击 **OK** 按钮。

(6) 体相减操作：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Volumes 命令，弹出一个拾取框。拾取编号为 V3 的体素，单击 **OK** 按钮。拾取编号为 V1 的体素，单击 **OK** 按钮，体相减操作的结果如图 3-55 所示。

(7) 改变视角方向：单击【Pan-Zoom-Rotate】工具栏中的 **Iso** 按钮。

(8) 平移工作平面：在【Offset WP】工具栏中的“X, Y, Z Offset”文本框中输入“0, 0, 34”后按回车键确认。

(9) 生成空心圆柱体：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Volumes > Cylinder > Hollow Cylinder 命令，弹出【Hollow Cylinder】对话框。在“Rad-1”“Rad-2”和“Depth”文本框中分别输入“25”“66”及“20”，单击 **OK** 按钮。

(10) 体相减操作：执行 Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Volumes 命令，弹出一个拾取框。拾取编号为 V2 的体素，单击 **OK** 按钮。拾取编号为 V1 的体素，单击 **OK** 按钮，体相减操作的结果如图 3-56 所示。



图 3-55 体相减操作的结果（一）



图 3-56 体相减操作的结果（二）

6. 在齿的支撑部分开孔

(1) 平移工作平面：在【Offset WP】工具栏中的“X, Y, Z Offset”文本框中输入“0, 45, -20”后按回车键确认。

(2) 生成一个实心圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Cylinder>Solid Cylinder 命令，弹出【Solid Cylinder】对话框。在“Radius”和“Depth”文本框中分别输入“10”及“20”，单击 **OK** 按钮。

(3) 改变当前坐标系为柱坐标系：执行 Utility Menu>WorkPlane>Change Active CS to>Global Cylinder 命令。

(4) 复制 5 个小圆柱体：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Copy>Volumes 命令，弹出一拾取框。拾取编号为 V1 的体素，单击 **OK** 按钮，弹出【Copy Volumes】对话框。在“Number of copies”和“Y-offset in active CS”文本框中分别输入复制生成的个数“5”及角度“72”，单击 **OK** 按钮。

(5) 体相减操作：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Subtract>Volumes 命令，弹出一个拾取框。拾取编号为 V3 的体素，单击 **OK** 按钮。拾取编号为 V1、V2、V4、V5 和 V6 的体素，单击 **OK** 按钮，体相减操作的结果如图 3-57 所示。

(6) 改变当前坐标系为笛卡儿坐标系：执行 Utility Menu>WorkPlane>Change Active CS to>Global Cartesian 命令。

7. 在中心孔上开键槽

(1) 平移工作平面：在【Offset WP】工具栏中的“X, Y, Z Offset”文本框中输入“0, -45, -14”后按回车键确认。

(2) 生成矩形块：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Volumes>Block>By Dimensions 命令，弹出【Create Block by Dimensions】对话框。如图 3-58 所示，输入数据，单击 **OK** 按钮。

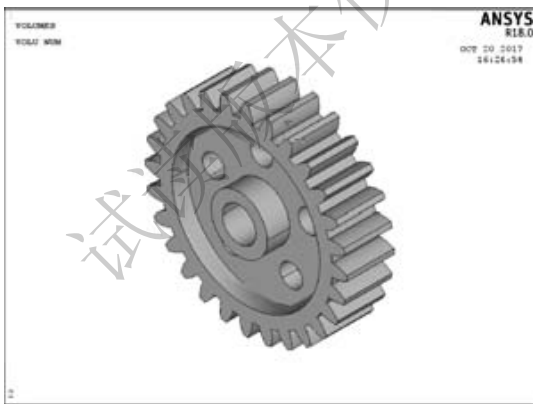


图 3-57 体相减操作的结果（一）



图 3-58 输入数据

(3) 体相减操作：执行 Main Menu>Preprocessor>Modeling>Operate>Booleans>Subtract>Volumes 命令，弹出一个拾取框。拾取编号为 V7 的体素，单击 **OK** 按钮。拾取编号为 V1 的体素，单击 **OK** 按钮，体相减操作的结果如图 3-59 所示。

(4) 关闭工作平面：执行 Utility Menu > WorkPlane > Display Working Plane 命令。

(5) 保存实体模型数据：执行 Utility Menu > File > Save As 命令，弹出【Save As】对话框。在【Save Database To】下拉列表框中输入文件名“T2-8.DB”，单击 **OK** 按钮。

8. 划分有限元网格

(1) 选择单元类型：执行 Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete 命令，弹出【Element Type】对话框。单击 **Add...** 按钮，弹出【Library of Element Type】对话框。分别选择“Structural Solid”和“Tet10node187”选项，单击 **OK** 按钮。再单击 **Close** 按钮，完成单元类型的选择。

(2) 设置单元尺寸：执行 Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrl > Manual Size > Global > Size 命令，弹出【Global Element Sizes】对话框。在“Element edge length”文本框中输入“5”，单击 **OK** 按钮。

(3) 采用自由网格划分方式生成有限元网格：执行 Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Volumes > Free 命令，弹出一个拾取框。单击 **Pick All** 按钮，生成的网格如图 3-60 所示。



图 3-59 体相减操作的结果（二）

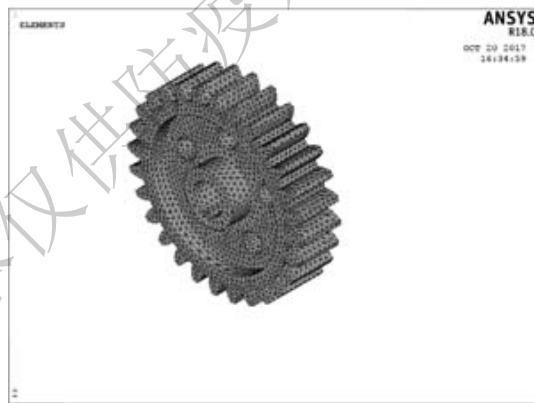


图 3-60 生成的网格

(4) 保存有限元模型数据：执行 Utility Menu > File > Save As 命令，弹出【Save As】对话框。在【Save Database To】下拉列表框中输入文件名“T2-9.DB”，单击 **OK** 按钮。

3.6 本章小结

ANSYS 生成模型的典型步骤是在前处理 (/PREP7) 模块内完成的。首先建立工作平面，激活适当的坐标系，当模型非常简单时，采用默认的环境设置即可；然后用自底向上建模和自顶向下建模两种方法生成实体，生成单元属性表（单元类型、实常数、材料属性和单元坐标系），设置单元属性指针；设置网格划分控制以建立需要的网格密度；通过划分实体模型的网格生成节点

和单元。有限元模型的主要要素是节点、单元、实常数、材料的属性等。

ANSYS 中最基本的坐标系统是全局和局部坐标系统，显示坐标系统、节点坐标系统、单元坐标系统也经常用到，坐标系的定义和应用使建模过程直观简便。

ANSYS 可和其他 CAD 软件接口，完成复杂实体建模。

通过连接板、轴和齿轮等典型零件的建模过程的练习，熟悉各种结构的建模过程，对此做到胸有成竹。

3.7 思考与练习

1. 概念题

- (1) 什么是工作平面？
- (2) ANSYS 内有哪几种坐标系，它们的适用场合怎样？
- (3) ANSYS 建模的基本过程有哪些？
- (4) 如何在 ANSYS 内构建复杂实体模型？

2. 操作题

- (1) 采用自上而下的建模方法，建立如图 3-61 所示轴承座的模型。
- (2) 建立如图 3-62 所示传动带轮零件的模型。

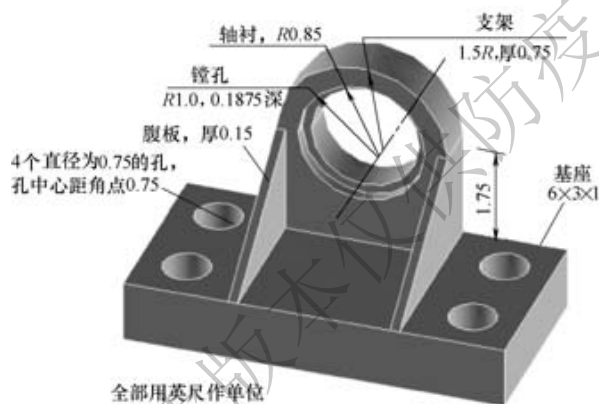


图 3-61 轴承座结构示意图 (图中尺寸单位为 ft)

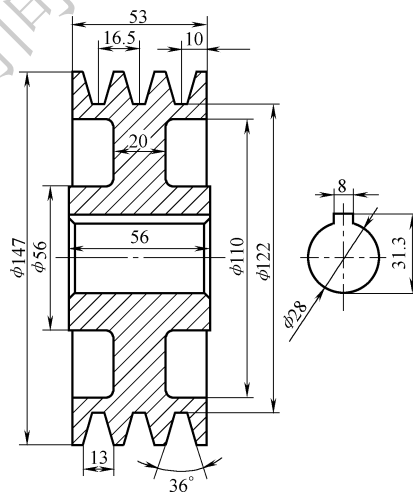


图 3-62 传动带轮结构简图
(图中尺寸单位为 ft)