

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
现代机械工程系列精品教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

控制工程基础

第4版

主 编 孔祥东 姚成玉
参 编 艾 超 李建雄 王跃灵
方一鸣 王洪斌
主 审 杨华勇 焦宗夏



机械工业出版社

本书由燕山大学液压专业与自动化专业合作编写，由华中科技大学李培根院士作序，并由浙江大学杨华勇院士和北京航空航天大学焦宗夏教授主审。

本书此次修订按照打造新工科精品教材的要求，以“培养新素养、形成新能力”为牵引重构课程边界，按教学实践积累总结和新工科要求重塑课程知识点，按与时俱进的时代特征要求提供多媒体教学内容，使内容更为优化，更切合时代需求。本书主要介绍控制工程中分析和综合线性定常系统的时域与频域的理论和方法，内容包括绪论、数学模型、时域分析、频域分析、综合与校正。

本书融入有针对性的例题，并精选习题，附有 MATLAB/Simulink 软件在控制工程中的应用实例、实践项目工程教学案例、控制系统的分析与综合以及习题参考答案。

本书配套有 PPT 教学课件 (www.cmpedu.com) 和微信公众教学资源 (登录方法见封底勒口)。微信公众教学资源包括教学课件、习题详解、扩展阅读等内容，以便于学习与交流互动。

本书适于作泛机械类工科专业的教材，也可供有关科技人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

控制工程基础/孔祥东, 姚成玉主编. —4 版. —北京: 机械工业出版社, 2019. 1

“十三五”国家重点出版物出版规划项目 现代机械工程系列精品教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-111-60951-3

I. ①控… II. ①孔… ②姚… III. ①自动控制理论-高等学校-教材
IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 216964 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑: 刘小慧 责任编辑: 刘小慧 陈文龙 刘丽敏
责任校对: 樊钟英 封面设计: 张 静
责任印制: 孙 炜
保定市中国画美凯印刷有限公司印刷
2019 年 5 月第 4 版第 1 次印刷
184mm×260mm·13.75 印张·323 千字
标准书号: ISBN 978-7-111-60951-3
定价: 39.80 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线: 010-88379833

读者购书热线: 010-68326294

网络服务

机工官网: www.cmpbook.com

机工官博: weibo.com/cmp1952

教育服务网: www.cmpedu.com

金书网: www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

序 言

2017年2月,教育部发布了“新工科”计划。在“新工科”计划推进之际,孔祥东教授等即推出了基于创新教育新思想和新方法的力作——《控制工程基础》(第4版)书稿,令人欣喜。

华中科技大学和燕山大学两校在液压专业等诸多学科有着广泛的学术交流。燕山大学作为河北省、教育部、工业与信息化部、国防科工局四方共建的全国重点大学,在与控制工程相关的流体传动与电液伺服控制技术、工业自动化控制理论与技术等研究领域具有国际先进水平。燕山大学是国内首批加入工程教育改革的高校之一。作为教育部选定的两所高校之一,燕山大学的工程教育专业认证接受了《华盛顿协议》国际专家的观摩考察,支撑了我国正式加入《华盛顿协议》,体现了其工程教育实力。本书是在传承前3版教材基础上的再创新,契合了工程教育的改革方向。

课程和教材是专业知识结构和体系的基础。控制工程基础是为泛机械类工科专业开设的学科基础课,也是学科交叉课,是研究如何控制各种被控对象或系统使其动态和稳态性能达到期望性能的工程基础理论和技术。控制工程基础的重要性在于它的基础性,其大量的概念、方法、原理和理论,对于泛机械类工科专业的后续课程和控制工程的许多学科分支,都具有十分重要的作用。控制科学的应用和影响已经遍及国民经济的各个领域,大到航空航天、航海、高铁,小到家电、3C、网络通信,而贯穿其中的系统、动态、协调之思想和方法更丰富了方法论。在实际工程中,机电液技术被广泛应用,机器设备的运行离不开机械本体、电液传动与控制系统(类比于人之骨骼、肌肉与神经系统),这就需要泛机械类工科学生具备一定的机电液多学科的空间感乃至大工程观。本书的一大特色正是将自动控制技术与机电液系统相结合,研究工程系统自动控制问题的基础理论和技术。

燕山大学编写的《控制工程基础》教材,自第1版出版以来已近30年,已为多所高校采用并广受好评。这些教学实践,为提高和改善本书的质量,特别是使本书的安排和编写更加符合泛机械类工科学生的认识规律,处理好抽象性和直观性,以及数学方法和工程概念间的关系,提供了重要的帮助。以孔祥东教授为带头人的机电液一体化国家级教学团队,在轧机厚控系统、压机控制系统、电液比例与伺服控制系统等领域完成了多项国家、省部级重大课题和工程项目,其所形成的工程视角和学术思考,为教材的顶层设计和边

界再设计提供了基础。本书以大学泛机械类工科为背景，系统且有重点地阐述了分析和综合线性定常系统的时域、频域理论和方法，并适应科技的发展，更新了教材知识内容，重构了课程知识体系。

本书体现了关联、启发教学设计的思想。如将梅逊公式并入“2.4 框图及其简化”一节中，删除了信号流程图，使得框图等效变换与梅逊公式呈并列且递进关系，直接由框图使用梅逊公式，可以化繁为简，以问题为导向；同时，知识点之后留有启发思考和分析总结内容，并关联后续章节，如框图特征式全文协调、引申出特征方程等。又如在“3.5 稳定性及其劳斯稳定判据”一节中，注意稳定性定义与后续课程内容如李雅普诺夫稳定性的关联协调，通过判定系统的稳定性和开环稳定性，将概念模糊、学生疑问之处解析清楚。将劳斯表列写方法用图示化方法给出，并对两种特殊情况进行分析总结，内容编写以学生为视角，将启发、引申、关联穿插其中，简练而有特色，读之宛若师生互动。

本书第3版出版至今已有10年。10年间，以全球化、网络化为代表的一系列颠覆性技术的发展，使得教育、学习、信息共享的方式都发生了深刻的变化。今天，智能手机已广为普及，大学生可以随时利用智能手机上网。本书推出适应网络化与新媒体特征的教学课件、微信公众教学资源，用以同步辅助教学，与学生交互，切合智能手机时代的信息获取与学习特征，便于学生随时查询和学习课程内容，进行扩展阅读，反馈问题，使碎片知识、查询式学习成为正式学习的良好补充，这是本书所提供的与时俱进的创新教学模式。总之，本书的编写团队对于教材、教学内容及教学方法进行了诸多新的尝试，这是难能可贵的。

如何构建工科新的教材体系及新的教材，体现基础知识、工程知识与前沿知识的交融，并兼具凝炼固化与改进开放，且充分利用现代科技的多元、交互、易学、易传播的特点，这都有待工程教育工作者的探索与实践，甚至社会科技力量的参与和创新，正所谓“独行快，众行远”。本书的出版，对更新该门课程知识、改善教学教材现状将起到积极的作用。

工程改变世界，科技创造未来，工程教育决定着人类的今天，更关系到人类的未来。最后，希望学习和使用本书的同学们，在学习过程中不断超越，为成为创新型卓越的工程人才奠定基础；也希望使用本书的教师们为探索新的教学方法、重塑工程教育文化做出自己的贡献！



华中科技大学教授

2018年10月

第4版前言

本书第3版荣获中国机械工业科学技术奖三等奖。本书前3版分别于1989年、2000年、2008年出版，累计30余印次，深受高校师生与读者的好评、支持和肯定。本书自第3版出版以来，我们得到了兄弟院校师生反馈的许多宝贵建议。为打造精品教材，编者在教学一线与科研实践中不断思考和总结。适逢教育部推出以培养未来多元化、创新型卓越工程人才为目标的“新工科”计划，以适应新科技革命、新产业革命和新经济发展背景下对工程教育的新需求。为此，我们根据“新工科”计划并在教学实践积累总结的基础上，对本书进行了边界再界定和内容再修订。

本次修订的内容主要有以下几个方面：

(1) 按培养新素养、形成新能力的要求确定课程边界 控制工程基础是为泛机械类工科专业开设的学科基础课，也是学科交叉课，其大量的概念、方法和原理，对于泛机械类工科专业的后续课程和控制工程的许多学科分支，都具有十分重要的基础作用。基于此，本书设计总学时为32~40学时（授课28~36学时，实验4学时），主要针对经典控制理论中的线性定常系统，阐明控制工程的模型、分析和控制三个基本问题。全书共分5章，内容包括绪论、数学模型、时域分析、频域分析、综合与校正。

(2) 按教学实践积累、总结和“新工科”要求重塑课程知识点 本书编写团队涵盖了机械、液压和自动化等专业的教师，具有丰富的教学与科研经验，在总结第3版以来的教学规律和经验，汲取兄弟院校教学实践中的建议和意见，尤其是在“新工科”对工程教育的改革方向和要求的基础上，对全书重新编排和调整，对各章内容进行更新和凝炼，对核心知识点进行凸显和关联，对例题和习题进行修改和精炼，新增课程“工程实践项目教学案例”和“控制系统的分析与综合工程实例”，并有MATLAB/Simulink软件在控制工程中的应用实例和习题参考答案。

(3) 按与时俱进的时代特征要求提供多媒体教学内容 为切合新媒体时代的信息获取与学习特征，本书配有PPT教学课件（请使用本书的老师到机械工业出版社教育服务网 www.cmpedu.com 下载）；同时，本书配套微信公众教学资源（有教学课件、习题详解、扩展阅读等内容，登录方法见封底勒口），用于同步辅助教学，便于教学互动、各校互联、反馈改进，方便学生随时查

询和学习课程内容，进行延伸关联阅读，使碎片式、查询式学习与正式学习相互补充，有利于进行大数据反馈分析并持续改进，提升教学与教材质量。

本书由燕山大学孔祥东教授、姚成玉教授担任主编。第1~2章、附录B由孔祥东教授和艾超副教授编写，第3章和附录A由姚成玉教授编写，第4章由王跃灵博士后和王洪斌教授编写，第5章及附录C由李建雄副教授和方一鸣教授编写。各章教学课件和习题详解由各章编者完成。全书由孔祥东教授、姚成玉教授统稿。研究生陈立娟为本书部分内容的编写给予了帮助。

衷心感谢华中科技大学前校长、中国机械工程学会第十一届理事会理事长、教育部机械类教学指导委员会主任委员(2013~2017年)、中国工程院院士李培根教授为本书作序。

衷心感谢浙江大学机械工程学院院长、中国工程院院士杨华勇教授和北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院院长、长江学者特聘教授焦宗夏担任本书主审。

本书是在前3版基础上进一步改进和更新完成的，这里向不再参与本次编写但具有历史性贡献的编者——东北重型机械学院/燕山大学王益群、李久彤、韩德才、高英杰、焦晓红、祁晓野、权凌霄和西安交通大学的阳舍和、杨公仆、王馨等以及前3版的主审东北大学周士昌、西安交通大学史维祥、北京航空航天大学王占林、上海交通大学范崇托等表示崇高的敬意。

燕山大学焦晓红教授审阅了本书部分章节，东北大学段洪君、湖南师范大学金耀、武汉轻工大学严清华、北京信息科技大学陈秀梅、同济大学靳文瑞、湘潭大学张大兵、内蒙古工业大学孟瑞锋、河北科技大学陈继荣、河北科技师范学院陈春明等兄弟院校的任课教师，以及燕山大学李慧剑、刘爽、李峰磊、刘志新、贺有智、杨晟刚、罗小元、马锴、唐英干等教师提出了许多宝贵意见或修订建议，在此一并表示衷心的感谢。

衷心感谢机械工业出版社责任编辑刘小慧老师多年来对本书第3、4版工作的支持和帮助。

本书难免有漏误和不足，敬请读者批评指正。

联系方式：邮箱 control@ysu.edu.cn，电话 13930358822(QQ 微信同号)。

编者

2018年10月

第3版前言

本书在《控制工程基础》第2版(王益群、孔祥东主编,机械工业出版社,2000)的基础上重新修订编写,是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书在编写过程中结合编者近几年的教学改革经验、科研积累以及读者的反馈意见,并广泛参考了国内外同类教材和相关文献,从教学、考研及工程实用性需求等角度出发,力求做到使教材内容概念表达准确、知识结构调整合理、教学安排层次清晰,并进一步突出“控制工程基础”的主要特点。

本书主要介绍工程中广为应用的经典控制理论和现代控制理论中系统分析与综合的基本方法。全书共分十章:前六章属于经典控制理论中的线性定常连续控制系统问题,阐明了自动控制的三个基本问题,即模型、分析和控制;第七章和第八章分别为非线性系统及采样控制系统;第九章为现代控制理论基础;第十章为典型控制系统的分析与设计实例。

本书主要在以下几个方面进行了删改和补充:

(1) 调整知识构成体系 增加了在工程中经常应用的根轨迹法;增添了现代控制理论内容,如第九章“现代控制理论基础”;突出机电系统作为主要控制对象,适当增加了工程控制系统实际应用的例子,如第十章“典型控制系统的分析与设计实例”等;精简了部分章节的内容。

(2) 调整章节结构体系 在本书经典控制理论部分中,以时域分析、根轨迹法、频率分析为主线,将原来独立成章的“控制系统的稳定性分析”和“控制系统的误差分析和计算”进行拆分,融入上述主线中,使知识构成和结构体系更加合理,也便于学习和阅读。

(3) 调整增添例题、习题 对不够典型且已陈旧的例题和习题进行了删减,增加了与工程应用结合紧密、具有代表性的例题和习题。部分习题附有参考答案。

(4) 集中介绍软件应用 在附录“基于 MATLAB 的控制系统设计”中作为专题来论述 MATLAB 和 Simulink 软件在控制工程中的应用,便于读者查阅。

使用本书讲授课程约需 50 学时,实验约需 6 学时。凡有“*”号的章节,属加深拓宽的内容,各学校可根据教学时数安排酌情讲授。

本书由燕山大学孔祥东教授、王益群教授主编。参加编写工作的有

孔祥东教授(第一章、第二章)、高英杰教授(第三章、第五章)、姚成玉副教授(第四章、附录、习题及答案)、方一鸣教授(第六章、第七章、第八章)、王洪斌教授(第九章、第十章)。全书由孔祥东、王益群教授统稿,姚成玉副教授协助整理。研究生权凌霄、谷彦鹏、赵琳琳、李萍等为本书部分章节的文字和绘图工作给予了帮助。

本书由北京航空航天大学王占林教授、上海交通大学范崇托教授主审。燕山大学王跃灵、刘爽、魏立新副教授等提出了许多宝贵意见。在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限,书中缺点和错误之处在所难免,欢迎读者批评指正。
联系方式: control@ysu.edu.cn。

编者

2007年5月

第2版前言

根据全国高校机械工程教学指导委员会1998年武汉会议的决定，我们修订了这本适应教学计划40~50学时的“控制工程基础”教材。

本书是在原《控制工程基础》(王益群、阳含和主编，机械工业出版社，1989)统编教材的基础上，结合编者近些年教改实践和计算机技术的普及重新编写而成的。

本书以介绍工程上广为应用的经典控制论为主，以使读者能够学会信息处理和系统分析与综合的基本方法。在编写时，力求重点突出，使读者对经典控制论有较全面的了解。考虑到近些年计算机应用的推广和求解手段的进步，还简要介绍了计算机采样控制系统和控制系统计算机辅助分析的基本方法，以使读者建立起这方面的基本概念。

全书共分九章，包括绪论、数学模型、时域响应分析、频域响应分析、稳定性分析、误差分析、系统的综合与校正、非线性系统和计算机采样控制系统等。有“*”号的章节为加深拓宽的内容，可根据需要选讲。

本书在论述上力求做到概念准确、层次清晰、深入浅出、易教易学，适当结合机、电、液方面编入一些易于理解的例题和习题。本书适于作机械设计制造及其自动化、材料成型与控制工程专业及其他非电类专业的教材，也可供有关科技人员参考。

本书由燕山大学王益群教授、孔祥东教授主编。参加编写工作的有王益群(第一章)、孔祥东(第二章、第四章、第五章)、李久彤(第三章)、高英杰(第六章、附录)、焦晓红(第七章、第八章)、方一鸣(第九章)。

本书由西安交通大学史维祥教授主审。2000年4月在秦皇岛燕山大学召开了本书的审稿会，西安交通大学、北京航空航天大学、燕山大学和机械工业出版社的有关专家出席了会议并提出了许多宝贵意见，在此，对上述单位及有关专家表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中如有不当之处，恳请读者批评指正。

编者

2000年5月

第1版前言

根据全国高等学校工科机电类 1986~1990 年教材编审、出版规划, 全国流体传动及控制教材编审组于 1983 年 12 月和 1984 年 12 月先后两次在西安开会, 起草并通过了本书的教学大纲。1986 年 10 月在南京召开的流体传动及控制专业教材编审组会议上, 根据加强基础、增强适应性的精神, 对本书的编写内容又做了进一步讨论。本书就是按照上述会议所通过的大纲, 结合编者多年的教学实践编写而成的。

本书以介绍工程上广为应用的经典控制论为主, 以期读者能够学会信息的处理和系统的分析和综合, 为学习专业课程和进一步学习控制理论打下基础。鉴于频域法是经典控制论的核心, 故在阐述上以频域法为主线展开, 同时还介绍了瞬态分析法、根轨迹法、控制系统的非线性分析等, 力求重点突出, 使读者对经典控制论有较全面的了解。考虑时延环节在工程上广泛存在, 故设置了一章介绍时延控制系统分析。又因多数院校在大学本科教学中未单独设置现代控制理论课程, 故又设置了现代控制理论概述一章。书中凡有“*”号的章节, 属加深拓宽的内容, 各校可视具体情况进行适当增减。

本书在论述上力求做到概念准确、层次清晰、深入浅出、精讲多练, 适当结合机、电、液方面编入一些易于理解的例题和一定数量的习题, 以加深对基本概念的理解。本书适于作流体传动及控制专业及其他机械类专业的教材, 也可供有关科技人员参考。

本书由东北重型机械学院(秦皇岛分校)王益群教授和西安交通大学阳含和教授主编。阳含和教授生前对本书的编写大纲提出过精辟、有益的见解。参加编写工作的有东北重型机械学院(秦皇岛分校)王益群(第三章、第四章、第八章、附录)、李久彤(第五章、第六章)、韩德才(第九章、第十章、第十一章)、西安交通大学杨公仆(第一章、第七章)、王馨(第二章)。

本书由东北工学院周士昌教授主审。1988 年 8 月在秦皇岛燕山大学(东北重型机械学院分校)召开了审稿会, 东北工学院、北京理工大学、太原工业大学、甘肃工业大学、沈阳工业大学的代表参加了会议并提出许多宝贵意见。燕山大学徐征明教授审阅了本书的部分章节, 编者和宋维公教授进行过讨论, 祁晓野同志在计算机应用方面给予了积极的帮助。在此, 对上述单位及有关人员一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限, 书中缺点和错误在所难免, 恳请广大读者批评指教。

编者

1988 年 10 月

目 录

序言	
第4版前言	
第3版前言	
第2版前言	
第1版前言	
第1章 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 控制系统的基本概念	3
1.2.1 控制系统的工作原理	4
1.2.2 开环控制系统与闭环控制系统	5
1.2.3 闭环控制系统的基本组成	6
1.2.4 控制系统的基本类型	7
1.2.5 对控制系统的基本要求	8
1.3 控制工程基础的主要任务与知识体系	9
1.3.1 主要任务	9
1.3.2 知识体系	9
本章小结	10
习题	10
第2章 控制系统的数学模型	11
2.1 控制系统的微分方程及线性化方程	11
2.1.1 机械系统的微分方程	11
2.1.2 电气系统的微分方程	14
2.1.3 液压系统的线性化微分方程	16
2.1.4 机电液系统的相似性	18
2.2 拉普拉斯变换及反变换	19
2.2.1 拉普拉斯变换及其运算法则	19
2.2.2 拉普拉斯反变换及其计算方法	23
2.3 传递函数及基本环节的传递函数	30
2.3.1 传递函数	30
2.3.2 基本环节的传递函数	32
2.4 框图及其简化	35
2.4.1 框图组成及连接方式	35
2.4.2 框图等效变换	39
2.4.3 梅逊公式	42
本章小结	46
习题	46
第3章 控制系统的时域分析	51
3.1 控制系统的时间响应及性能指标	51
3.1.1 典型输入信号	51
3.1.2 时间响应概述	54
3.1.3 瞬态性能指标	56
3.1.4 稳态性能指标	58
3.2 一阶系统的时域分析	58
3.2.1 一阶系统的数学模型	58
3.2.2 一阶系统的时间响应	59
3.2.3 一阶系统的瞬态性能指标	61
3.3 二阶系统的时域分析	62
3.3.1 二阶系统的数学模型	62
3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应	63
3.3.3 欠阻尼二阶系统的瞬态性能指标	66
3.4 高阶系统的时域分析	72
3.5 稳定性及其劳斯稳定判据	73
3.5.1 稳定性的概念	73
3.5.2 线性定常系统稳定的充要条件	74
3.5.3 劳斯稳定判据	75
3.6 稳态误差分析与计算	82
3.6.1 误差的定义	82
3.6.2 稳态误差的基本概念	83
3.6.3 稳态误差的计算	85
3.7 根轨迹法	89
3.7.1 根轨迹的基本概念	89
3.7.2 幅值条件和相角条件	90
3.7.3 根轨迹的绘制	91
本章小结	95
习题	95

第 4 章 控制系统的频域分析	98	5.2.2 PID 参数整定方法	146
4.1 频率特性的基本概念	98	5.3 串联校正	148
4.2 频率特性图形表示法	102	5.3.1 相位超前校正装置	149
4.2.1 Nyquist 图	102	5.3.2 相位滞后校正装置	150
4.2.2 Bode 图	108	5.3.3 相位滞后-超前校正装置	153
4.2.3 最小相位系统	118	5.3.4 串联校正装置的设计	155
4.3 几何稳定判据	120	5.4 反馈校正	162
4.3.1 奈氏判据	120	5.4.1 反馈的作用	163
4.3.2 对数判据	122	5.4.2 反馈校正装置的设计	163
4.4 相对稳定性	123	5.5 复合校正	166
4.4.1 相角裕度和幅值裕度	123	5.5.1 按给定量顺馈补偿控制器的	
4.4.2 相对稳定性的计算与分析	125	设计	166
4.5 闭环频率特性	128	5.5.2 按扰动量前馈补偿控制器的	
4.5.1 由开环频率特性估计闭环频率		设计	170
特性	128	本章小结	170
4.5.2 闭环系统的频域性能指标	129	习题	171
4.5.3 系统辨识的概念	130	附 录	175
本章小结	134	附录 A MATLAB/Simulink 软件在控制	
习题	135	工程中的应用实例	175
第 5 章 控制系统的综合与校正	139	附录 B 阀控缸位置闭环控制系统实践	
5.1 概述	139	项目工程教学案例	185
5.1.1 校正的概念和实质	139	附录 C 转速反馈直流调速控制系统的	
5.1.2 控制系统的性能指标	140	分析与综合	192
5.1.3 校正方法	142	习题参考答案	201
5.1.4 校正方式	142	参考文献	207
5.2 基本控制规律及 PID 参数整定	143		
5.2.1 基本控制规律及其作用	144		

第1章

绪论

1.1 概述

控制论(Cybernetics)是研究生物、机器等各种系统控制和调节规律的科学,是由信息论的先驱、控制论的奠基人维纳(Wiener)提出的。控制论不仅是一门极为重要的科学,而且也是一门卓越的方法论,横跨基础科学、技术科学和社会科学等学科,具有普遍适用于各门科学和各个领域的思想和方法。将控制论推广到工程技术领域,产生了工程控制论;将控制论推广到生物系统、经济运行及社会治理等领域,产生了生物控制论、经济控制论、社会控制论等。

工程控制论是研究机器设备和工程系统自动控制问题的技术科学。控制论、工程控制论是在早期自动控制理论的基础上发展起来的。工程控制论通常也被理解为自动控制理论(Automatic Control Theory),而自动控制理论通常简称为控制理论。所谓自动控制,就是在没有人直接参与的情况下,采用控制装置使被控对象(如机器设备的运行或生产过程的进行)的某些物理量(如力、位移、速度、温度、电压、电流、压力、流量等)在既定精度范围内按照给定的规律变化。自动控制是人类在认识世界和劳动创造过程中发展起来的。有了自动控制,人类可以从笨重、重复性的劳动中解放出来,从事更富创造性的工作。自动控制技术广泛应用于工业、农业、国防等领域和家电、网络通信、汽车等产品中,人类生活已一时一刻也离不开它。自动控制技术是当代发展迅速、引人注目的高新技术之一,是推动新技术革命和新产业革命的关键核心技术。

控制工程基础(Fundamentals of Control Engineering),也称控制理论基础,主要阐述的是工程控制论的基础理论。在实际工程中,机械、电气、液压和自动控制技术被广泛应用。机器设备的服役运行类似人体机能的运转,离不开机械本体(类似骨骼)、机械电气流体传动(类似肌肉)与控制系统(类似神经系统),这就需要研究机器设备和工程系统自动控制的基础理论(即控制理论基础)。

控制理论的诞生源于解决工程问题的需要，实际生产需求和工业进步促进了控制理论的发展，而控制理论的发展反过来又推动了工业的进步。控制理论的发展与工业的进步互为促进，经历了四个历史阶段，如图 1-1 所示。

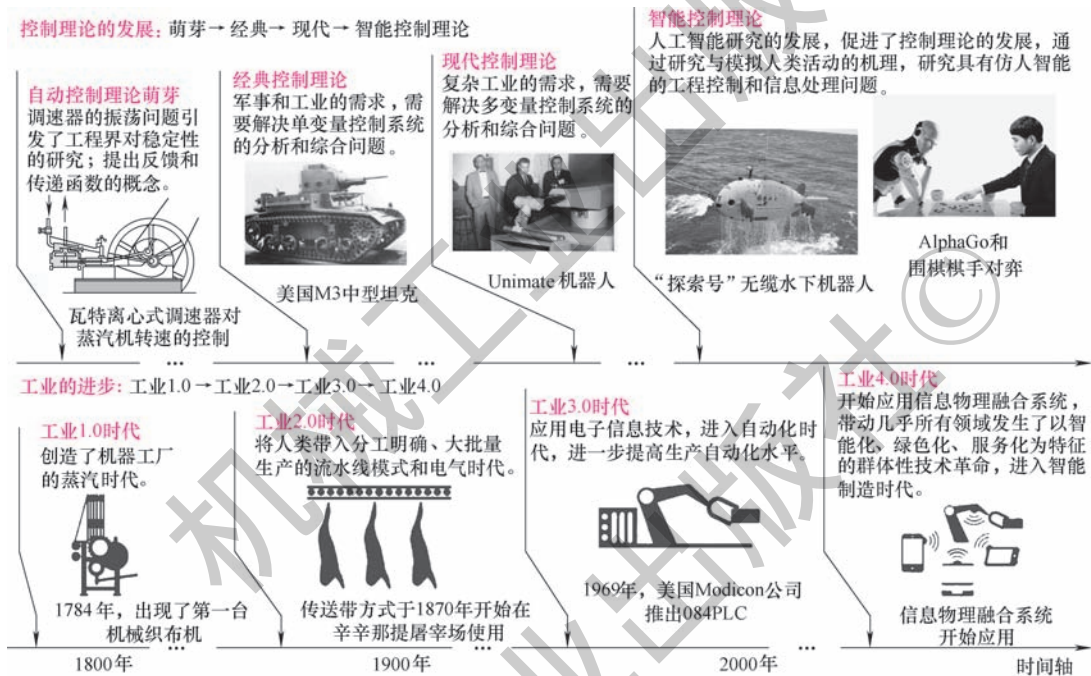


图 1-1 控制理论发展与工业进步的历史进程

第一阶段: 自动控制理论萌芽(18 世纪末~20 世纪 30 年代)

自动控制理论的产生可追溯到 18 世纪的第一次工业革命, 此时工业进入工业 1.0 时代——蒸汽时代, 通过水力和蒸汽机实现工厂机械化。1769 年瓦特发明了蒸汽机离心式飞锤调速器, 用来自动调节蒸汽机的转速。调速器的振荡问题引发了工程界对系统稳定性的讨论; 1868 年麦克斯维发表了讨论这种反馈系统稳定性问题的论文《论调节器》; 1877 年劳斯(Routh)和 1895 年赫尔维茨(Hurwitz)分别提出了代数稳定判据; 1892 年李雅普诺夫(Lyapunov)提出了系统稳定性判定方法。19 世纪末~20 世纪上半叶, 电机引发了第二次工业革命, 使人类进入了电气时代, 即工业 2.0 时代。工业生产中广泛应用各种自动调节装置, 促进了对控制系统的分析和综合研究。针对电子管放大器失真的问题, 1927 年布莱克引入了反馈的概念, 使人们对自动控制系统中反馈控制的结构有了更深刻的认识。至此, 自动控制理论发展为一门新兴学科的前提条件已经基本具备, 此后, 自动控制理论历经了经典控制理论、现代控制理论和智能控制理论发展阶段。

第二阶段: 经典控制理论(20 世纪 30~50 年代)

经典控制理论产生于工业 2.0 时代的成熟期。第二次世界大战期间, 为了解决防空火力控制系统和飞机自动导航系统等军事技术问题, 各国科学家设计出各种精密的自动调节装置。在拉普拉斯(Laplace)变换基础上的传递函数、劳斯和赫尔维茨提出的代数稳定判据和 1932 年奈魁斯特(Nyquist)提出的判别稳定性的奈氏判据、1948 年伊万斯(Evans)

提出的根轨迹法等，奠定了**适用于单变量控制系统的经典控制理论**（又称**古典控制理论**）的基础。1945年，维纳把反馈的概念推广到生物等一切控制系统，并在1948年出版了《控制论——关于在动物和机器中控制和通信的科学》一书，奠定了控制论这门学科的基础。控制论的原理和方法被运用于工程技术领域，形成了工程控制论，1954年，钱学森总结了控制理论的研究成果并出版了《工程控制论》。

第三阶段：现代控制理论（20世纪50~70年代）

20世纪下半叶，信息技术、自动化技术引发了第三次工业革命，人类进入**工业3.0时代**，社会生产从电气化、半自动化向自动化转变，劳动生产率再次大飞跃。复杂工业过程和航天技术的自动控制问题，都是多变量控制系统的分析和综合问题，迫切需要解决，但经典控制理论的直接应用遇到了困难，需要新控制方法的出现。这期间计算机技术和空间技术有了巨大进步，1960年卡尔曼(Kalman)提出的状态空间法、能控性、能观性，加之系统稳定性的李雅普诺夫判定方法等，标志着**适用于多变量控制系统的现代控制理论**的诞生。现代控制理论可有效解决多变量控制问题，并逐渐形成了最优控制、自适应控制等多个重要分支。

第四阶段：智能控制理论（20世纪70年代~至今）

智能控制理论产生于工业3.0时代向工业4.0时代的过渡阶段。随着工业进步，人们开始将人工智能引入自动控制系统中，控制理论因此向着智能控制理论的方向发展。**智能控制理论是运用人工智能的概念和方法，来解决复杂被控对象的建模和系统的控制、优化等问题**，具体来说就是运用神经网络、迭代学习、模糊控制等理论方法以及由知识库、数据库、学习机、推理机等组成的智能决策单元来解决复杂控制问题。控制理论的发展助推了工业4.0时代的到来。在当前的**工业4.0时代**，新一轮科技革命和产业变革正在孕育兴起，全球科技创新呈现新的发展态势和特征，开始应用信息物理融合系统(Cyber-Physical Systems, CPS)，以智能制造为核心，信息技术、生物技术、新材料技术、新能源技术广泛渗透，带动几乎所有领域发生了以智能化、绿色化、服务化为特征的群体性技术革命，这是新一轮的工业革命，由此，美国提出了“先进制造国家战略计划”，德国发布了“工业4.0”战略，我国提出了“中国制造2025”战略。这对控制理论的发展提出了更高的要求，对控制理论的应用提供了更广阔的空间。

从控制理论的发展历程可以看出，经典控制理论、现代控制理论、智能控制理论适应于不同的控制问题，且在当下并存应用、各具特色、相辅相成，其中，经典控制理论是基础，现代控制理论、智能控制理论是经典控制理论的延伸和拓展。同时，控制理论的发展反映了人类社会由机械化(工业1.0)到电气化(工业2.0)，再到自动化(工业3.0)，继而走向全面实现数字化、网络化和智能化(工业4.0)时代。

1.2 控制系统的基本概念

在各种机器设备和生产过程中，常常要求某些物理量(如力、位移、速度、温度、电压、电流、压力、流量等)保持恒定或者按照给定的规律变化，这就要求控制系统进行控

制和调整，以减小或消除系统参数扰动和外界扰动的影响。下面介绍控制系统如何实现这些物理量的自动控制。

1.2.1 控制系统的工作原理

1. 恒温系统的人工控制与自动控制

首先研究恒温系统，实现恒温控制有两种办法：**人工控制**和**自动控制**。

图 1-2 所示为人工控制的恒温控制箱。人们可以通过调压器改变加热电阻丝的电流，以达到控制温度的目的。箱内温度是由温度计检测的。人工控制过程可归结如下：

- 1) 观测由检测元件(温度计)测出的恒温箱温度(被控制量)。
- 2) 与要求的温度值(期望值)比较，得出偏差的大小和方向。
- 3) 根据偏差的大小和方向再进行控制：当恒温箱温度高于所要求的给定温度值时，就调节调压器，使电流减小，温度降低；若温度低于给定温度值，则调节调压器，使电流增加，温度升高。

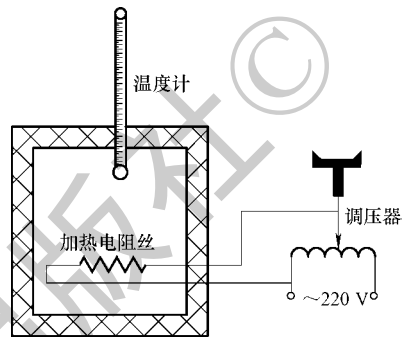


图 1-2 人工控制的恒温箱

因此，**控制的过程就是检测、求偏差、再控制，以纠正偏差的过程**。简单地讲就是“**检测偏差用以纠正偏差**”的过程。如果用控制器等装置实现人的“**检测偏差用以纠正偏差**”的职能，就是自动控制系统。

图 1-3 所示为恒温箱自动控制系统。图中，恒温箱的温度是由给定信号电压 u_1 控制的。当外界因素引起箱内温度变化时，作为检测元件的热电偶，把温度转换成对应的电压信号 u_2 并反馈回去与给定信号 u_1 相比较，所得结果即为温度的偏差信号 $\Delta u = u_1 - u_2$ ，再经过电压、功率放大后，用以改变电动机的转速和方向，并通过传动装置移动调压器动触头。当温度偏高时，动触头向着降低输出电压减小电流的方向移动，反之则加大电流，直到温度达到给定值为止。即只有在偏差信号 $\Delta u = 0$ 时，电动机才停转。这样就实现了自动控制。而所有这些装置便组成了一个自动控制系统。

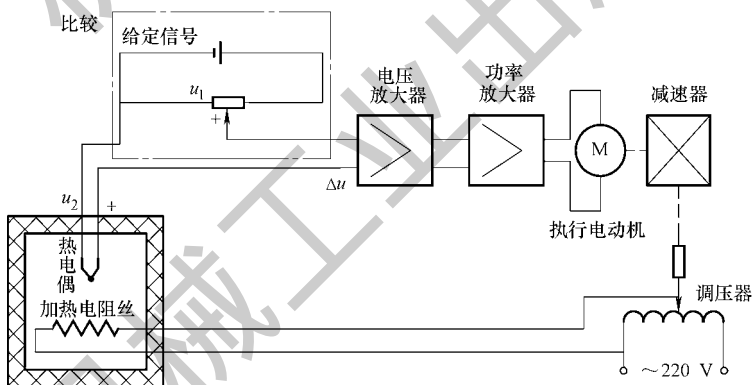


图 1-3 恒温箱自动控制系统

人工控制系统和自动控制系统的原理是相似的。检测装置相当于人的眼睛，控制器类似于人脑，执行机构类似于人手。其共同的特点是都要检测偏差并用检测到的偏差去纠正偏差，而没有偏差便没有调节过程。在自动控制系统中，这一偏差是通过反馈建立起来的。给定量叫作控制系统的输入量，被控制量叫作控制系统的输出量。**反馈**(Feedback)就是指输出量通过适当的检测装置将信号全部或一部分返回输入端，使之与输入量进行比较，通常为**负反馈**(Negative Feedback)，即反馈信号起到与输入信号相反的作用，或者说反馈信号与输入信号极性相反(或变化方向相反)，比较的结果即为偏差。因此，基于反馈基础上的“检测偏差用以纠正偏差”的原理又称为**反馈控制原理**。利用反馈控制原理组成的系统称为反馈控制系统。虽然实现自动控制的装置各不相同，但反馈控制的原理却是相同的。可以说，**反馈控制是实现自动控制最基本的方法**。

本书主要针对自动控制系统进行分析与研究，所以后文将自动控制系统简称控制系统。

2. 板带轧机的板厚自动控制

图 1-4 所示为板带轧机液压厚度自动控制(Automatic Gauge Control, AGC)系统。由于板带轧制的速度和精度要求越来越高，现代化轧机的电液伺服压下机构已经代替了机械式压下机构。图中，板带出口厚度 h 由检测元件测出并反馈到电液伺服系统中，电液伺服系统发出控制信号以驱动液压缸，从而调节轧制辊缝，使得板带出口厚度 h 保持在要求的误差范围内。

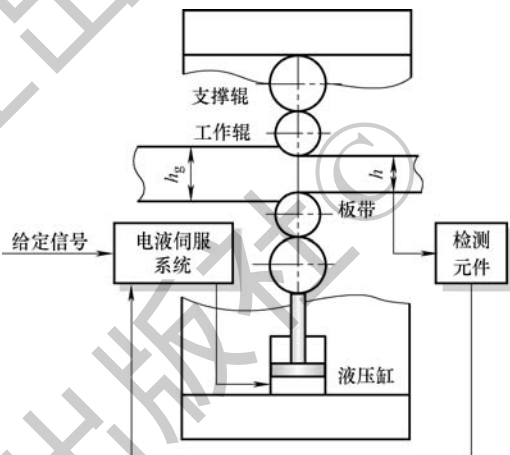


图 1-4 板带轧机液压 AGC 系统

1.2.2 开环控制系统与闭环控制系统

根据有无反馈作用可把控制系统分为两类：开环控制系统与闭环控制系统。

1. 开环控制系统

如果控制器和被控对象之间只有正向作用而没有反向联系，即输出端和输入端之间不存在反馈回路，输出对系统的控制作用没有影响，这样的系统称为开环控制系统。图 1-5 所示的电动机转速控制系统就是开环控制系统。当给定电压改变时，电动机转速也跟着改变，但这个控制系统易受负载转矩的影响，即当负载转矩改变时，转速也要随之改变。

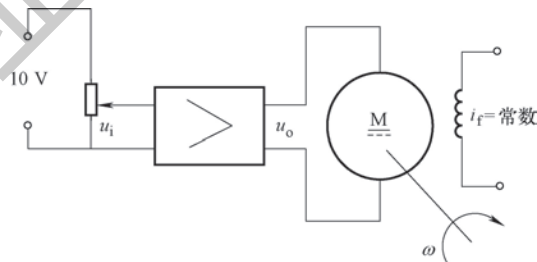


图 1-5 电动机转速开环控制系统

2. 闭环控制系统

闭环控制系统即反馈控制系统。这种

系统的特点是系统的输出端和输入端之间存在反馈回路，即输出量对系统的控制作用有直接影响。闭环的作用就是利用反馈来减少偏差。闭环控制的突出优点是系统控制精度高，当系统出现干扰时，只要被控制量的实测值偏离给定值，闭环控制就会产生控制作用来减小这一偏差。图 1-6 所示的闭环调速系统就能大大降低负载转矩对转速的影响，例如负载加大，转速就会降低，但有了反馈，偏差就会增大，电动机电压就会升高，转速又会上升，并在一定误差范围内保持为设定值。

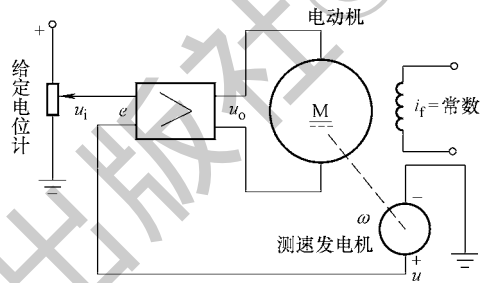


图 1-6 闭环调速系统

闭环控制系统的控制精度在很大程度上是由形成反馈的检测元件的精度决定的，但反馈的引入就存在“检测偏差用以纠正偏差”的调节过程，由于元件惯性、储能耗能元件能量形式转换，容易使系统在调节过程中产生振荡、甚至使系统不稳定，这是闭环控制系统的缺点。因此控制精度和稳定性是闭环控制系统存在的一对矛盾。

通常，相对于开环控制系统，闭环控制系统抗干扰能力强、控制精度高，但系统结构相对复杂。

1.2.3 闭环控制系统的基本组成

图 1-7 所示为典型的闭环控制系统框图，该图表示了系统中各个元件的位置和它们相互间的关系。由图可以看出，典型的闭环控制系统应该包括给定元件、比较元件、放大元件、执行元件、控制对象、反馈元件及反馈校正元件等。

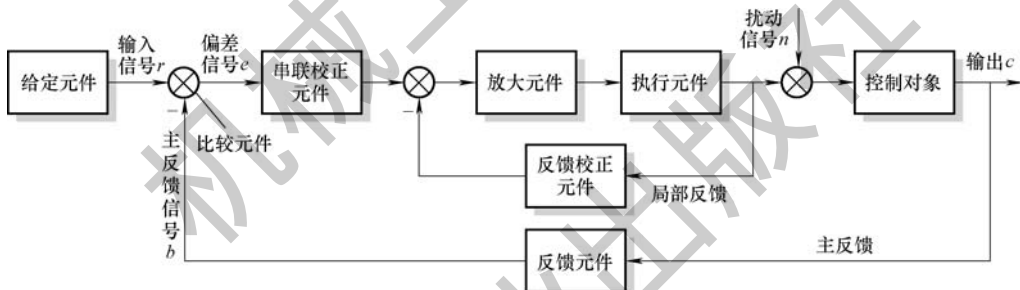


图 1-7 典型的闭环控制系统框图

- 1) **给定元件**：用于产生系统的给定信号或输入信号。例如调速系统的给定电位计。
- 2) **比较元件**：用来比较输入信号和反馈信号大小，得到偏差。例如差接的电路、自整角机、旋转变压器、机械式差动装置、运算放大器等。
- 3) **放大元件**：对偏差信号进行信号放大和功率放大的元件。例如伺服功率放大器、电液伺服阀等。

4) **执行元件**: 直接对控制对象进行操作的元件。例如执行电动机、马达、液压缸等。

5) **控制对象**: 控制系统所要操纵的对象, 它的输出量即为系统的被控制量。例如机床的工作台、轧机的工作辊等。

6) **反馈元件**: 检测被控制量或系统输出量, 并产生反馈信号, 该信号与输出量存在着确定的函数关系(通常为比例关系)。例如压力传感器、温度传感器、调速系统的测速发电机等。

7) **反馈校正元件**: 或称校正装置, 用以稳定控制系统, 提高系统控制性能, 有串联校正、反馈校正和复合校正等形式。

1.2.4 控制系统的基本类型

控制系统的类型很多, 它们的结构类型和所完成的任务各不相同。控制系统可以按有无反馈作用分为开环控制系统和闭环控制系统, 还可以根据其他不同的分类方法进行类型的划分, 概括如下。

1. 按输入量的运动规律划分

(1) 恒值调节系统 系统输入量为常值或者随时间缓慢变化。系统控制器的基本任务是当出现扰动时, 使系统的输出量保持恒定的期望值, 例如稳压电源、恒温系统等。对于这类系统, 分析重点是研究各种扰动对控制对象的影响以及抗扰动的措施。

(2) 程序控制系统 又称为过程控制系统, 系统输入量为已知给定的时间函数, 系统的控制过程按预定程序进行。近年来, 随着计算机的发展, 数字程序控制系统已被广泛应用。

(3) 随动控制系统 又称为伺服控制系统或跟踪控制系统, 系统的输入量是时间的未知函数, 即输入量的变化规律事先无法确定, 要求输出量能够快速、准确地复现输入量, 如火炮自动瞄准敌机的系统。

2. 按系统线性特性划分

(1) 线性系统 组成系统的元器件特性均为线性(或基本为线性), 能用线性常微分方程描述其输入与输出关系的系统。线性系统满足叠加原理, 其时间响应的特征与初始状态无关。

(2) 非线性系统 只要有一个元器件特性不能用线性方程描述, 即为非线性系统。在描述非线性系统的常微分方程中, 输出量及其各阶导数不全是一次的, 或者有的输出量导数项的系数是输入量的函数。非线性系统不能应用叠加原理, 其时间响应的特征与初始状态有很大关系。

严格地讲, 自然界不存在线性系统, 因为各种物理系统总是具有不同程度的非线性。但只要非线性不严重, 能用线性系统理论和方法对待的系统均可称为线性系统。

3. 按参数是否为常数划分

(1) 时变系统 又称非定常系统, 当系统数学描述中含时间 t 时, 即数学描述中的系

数是包含 t 的函数, 则称相应的系统为时变系统。

(2) 定常系统 又称时不变系统, 定常系统的特点是系统数学描述中不含时间 t 。定常系统在物理上代表了结构和参数都不随时间变化的一类系统。

如果系统既是线性的, 又是定常的, 则称为线性定常系统。本书以线性定常系统为研究对象。

按系统组成元件的物理性质又可分为电气控制系统、液压控制系统和气动控制系统等。按被控制量的不同又可分为温度控制系统、位置控制系统、速度控制系统、温度控制系统、电压控制系统、电流控制系统、压力控制系统、(流体或网络的)流量控制系统等。按机器设备及工艺的不同又可分为轧机控制系统、压机控制系统、连铸控制系统、3D 打印(增材制造)控制系统、盾构掘进机控制系统、飞机制动与防滑控制系统、汽车防抱死制动系统(Anti-lock Braking System, ABS)、机床控制系统、机器人控制系统、锅炉控制系统、风力发电机组控制系统、电池充放电控制系统等。

1.2.5 对控制系统的基本要求

对控制系统的基本要求一般可归结为稳定性、快速性、准确性, 即稳、快、准三个方面。

(1) 稳定性 由于系统存在着惯性, 当系统的各个参数匹配不当时, 将会引起系统的振荡、甚至使系统失去工作能力。稳定性就是指动态过程的振荡倾向和系统能否恢复平衡状态的能力。通常, 一个能够实际运行的控制系统, 必须是稳定的系统, 因此, 稳定性是系统工作的首要条件。

(2) 快速性 快速性是指当系统输出量与输入量之间产生偏差时, 消除偏差过程的快慢程度。

(3) 准确性 准确性是指在调整过程结束后输出量与输入量之间的偏差, 或称为静态精度, 这也是衡量系统工作性能的重要指标。例如数控机床精度越高, 则加工精度也越高。

同一系统的稳、快、准是相互制约的, 例如, 改善稳定性, 系统控制过程又可能变得迟缓、快速性变差, 准确性也可能变坏; 提高快速性, 可能会引起系统强烈振荡、使稳定性变差。由于被控对象的工况和要求不同, 不同的系统对稳、快、准的要求各有侧重, 因而要具体问题具体分析。

对于控制系统而言, 对其稳定性、快速性和准确性方面的性能指标可在时域或频域内给出。

(1) 时域性能指标 时域性能指标包括瞬态性能(稳定性与快速性)指标和稳态性能(准确性)指标。

(2) 频域性能指标 频域性能指标不仅反映系统在频域方面的特性, 而且当时域性能指标难以求得时, 一般可先用频率特性实验来求出该系统的频域性能指标, 再由此推出其时域性能指标。

这两种形式的指标之间有确定的关系, 因此是等价的(见 5.1.2 节)。

1.3 控制工程基础的主要任务与知识体系

1.3.1 主要任务

控制工程基础实际上是研究线性定常系统的分析和综合问题。通常，研究系统运动规律的问题称为分析问题，研究改变运动规律的可能性和方法的问题称为综合问题。前者属于认识系统，后者则为改造系统。

对于分析问题而言，主要是研究当系统和输入已知时的系统输出，进而通过输出来研究系统自身的问题，即分析系统的稳定性、快速性和准确性。

对于综合问题而言，主要是研究使系统输出符合给定稳、快、准某一或某些要求的控制规律。

无论解决哪类问题，都必须具有丰富的控制理论知识。

更重要的是，要以系统全面而不是零散片面的、动态发展而不是静止不变的、协调关联而不是单一孤立的观点和方法来处理问题，方能达到预期目标。这是控制理论所体现的方法论。

1.3.2 知识体系

本书系统且简要地阐述了时域和频域内分析与综合线性定常系统的理论和方法，其知识体系如图 1-8 所示。

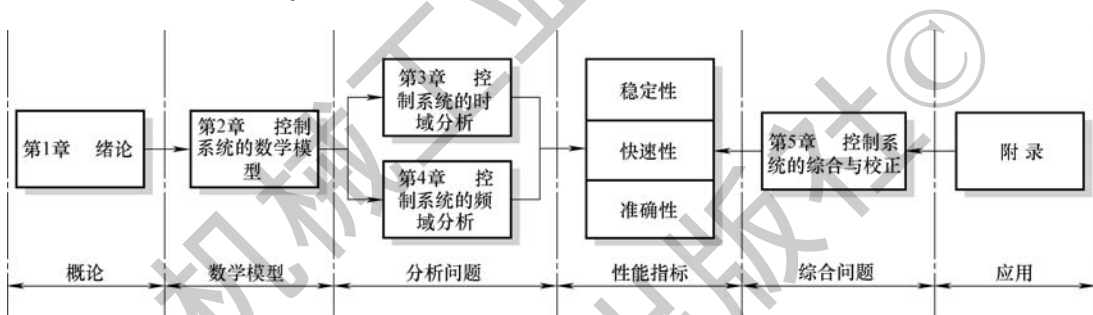


图 1-8 本书知识体系

1) 介绍了控制工程基础的基本概念及控制理论的发展历程，论述了控制系统的工作原理、开环控制与闭环控制、闭环控制系统的基本组成、控制系统的基本类型、对控制系统的基本要求以及控制工程基础的主要任务和知识体系。

2) 针对机器设备工程系统中的控制问题，就其数学模型进行阐述，主要介绍了控制系统的微分方程及线性化方程、拉普拉斯变换及反变换、传递函数及基本环节的传递函数、框图及其简化等内容。

3) 基于上述数学模型，分别从时域和频域分析系统性能。时域分析方法介绍了控制系统时间响应及性能指标、一阶系统时域分析、二阶系统时域分析、高阶系统时域分析、

稳定性及其劳斯稳定判据、稳态误差分析与计算和根轨迹法等内容；频域分析方法介绍了频率特性的基本概念、频率特性图形表示法、几何稳定判据、相对稳定性、闭环频率特性等内容。

在上述分析的基础上，对系统进行综合与校正来提升系统性能。主要阐述了基本控制规律及 PID 参数整定、串联校正、反馈校正、复合校正等内容。

最后，通过 MATLAB/Simulink 软件在控制工程中的应用实例、阀控缸位置闭环控制系统实践项目工程教学案例和转速反馈直流调速控制系统的分析与综合等工程实际案例，建立理论方法与工程实践的联系。

本章小结

本章介绍了控制工程基础的基本概念及控制理论的发展历程，论述了控制系统的工作原理、开环控制与闭环控制、闭环控制系统的基本组成、控制系统的基本类型及对控制系统的基本要求，最后阐述了控制工程基础的主要任务和本书知识体系。

习题

1-1 思考以下问题。

- 1) 闭环控制系统的基本组成。
- 2) 反馈和反馈控制原理的含义。
- 3) 开环控制和闭环控制的特点。
- 4) 评价控制系统的三大基本要求之间是否存在相互影响。
- 5) 什么是控制系统的分析？什么是控制系统的综合？

1-2 填空。

- 1) 对控制系统的基本要求是_____、_____和_____。
- 2) 根据反馈环节的有无，控制系统可分为_____和_____。

第2章

控制系统的数学模型

研究控制系统,不仅要定性地了解系统的工作原理及其特性,更要定量地描述系统的动态性能,揭示系统的结构和参数与性能之间的关系,这就需要建立系统的数学模型。按钱学森的观点,控制系统的数学模型是通过对问题的分析,利用考察来的机理,吸收一切主要因素、略去一切次要因素所创造出来的对系统的数学表示(数学表达式、几何图形等)。显然,数学模型是用数学语言描述的模型,模型可以是语义模型、数学模型、图形化模型等。本书涉及的控制系统的数学模型有微分方程、传递函数和框图等。建立控制系统的数学模型,并在此基础上对控制系统进行分析、综合,这是控制工程的基本方法。建立控制系统的数学模型有两种方法:分析法和实验法。分析法是根据系统和元件所遵循的有关定律(如力学、电学等定律)来推导出数学表达式,从而建立数学模型;实验法是通过实验数据进行处理,拟合出最接近实际系统的数学模型。本章采用分析法建立数学模型,依次介绍控制系统微分方程的建立方法及微分方程线性化方法、由微分方程转换为代数方程的数学工具——拉普拉斯变换、传递函数、系统框图及其简化方法。

2.1 控制系统的微分方程及线性化方程

微分方程是控制系统的一种基本数学模型,是根据控制系统的动力学特性列出来的反映其动态特性的基本方程,是列出传递函数的基础。

工程中的机械系统、电气系统和液压系统等,一般都可以用微分方程加以描述,下面将依次进行介绍。

2.1.1 机械系统的微分方程

机械系统的微分方程可用牛顿第二定律推导。在机械系统中,平移系统和回转系统是典型的机械系统,如图 2-1 所示。

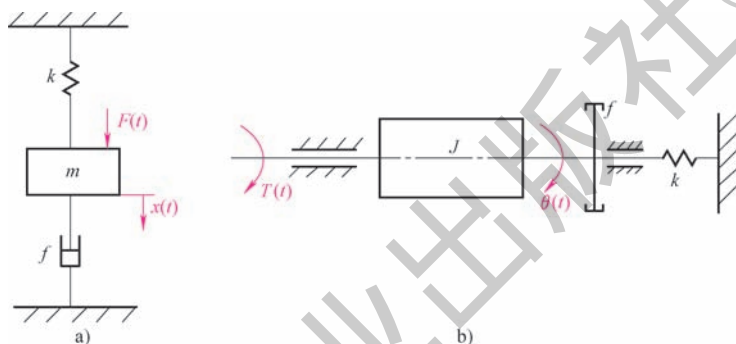


图 2-1 机械系统

a) 平移系统 b) 回转系统

牛顿第二定律：一物体的加速度，与其所受的合外力成正比，与其质量成反比，而且加速度与合外力同方向（作用在物体上的合外力与该物体的惯性力构成平衡力系）。用公式可表示为

$$-m\ddot{x}(t) + \sum F_i(t) = 0 \quad (2-1)$$

式中， $\sum F_i(t)$ 为作用在物体上的合外力； $\ddot{x}(t)$ 为物体的加速度； m 为物体的质量； $-m\ddot{x}(t)$ 为物体的惯性力。

如图 2-1a 所示的机械平移系统，用牛顿第二定律列出的运动微分方程式为

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t) \quad (2-2)$$

式中， $x(t)$ 为运动体的位移，单位为 m； f 为粘性阻尼系数，单位为 $N \cdot s \cdot m^{-1}$ ； k 为弹簧刚度，单位为 $N \cdot m$ ； $F(t)$ 为外力，单位为 N。

图 2-1b 所示为机械回转系统，相应的运动微分方程为

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + f \frac{d\theta(t)}{dt} + k\theta(t) = T(t) \quad (2-3)$$

式中， J 为旋转体的转动惯量，单位为 $kg \cdot m^2$ ； $\theta(t)$ 为旋转体的转角，单位为 rad； f 为转动时的粘性阻尼系数，单位为 $N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$ ； k 为扭转弹簧刚度，单位为 $N \cdot m \cdot rad^{-1}$ ； $T(t)$ 为外加转矩，单位为 $N \cdot m$ 。

例 2-1 组合机床动力滑台铣平面时，当切削力 $F_i(t)$ 变化时，滑台可能产生振动，从而降低被加工工件的切削表面质量。可将动力滑台连同铣刀抽象成如图 2-2 所示的质量-弹簧-阻尼系统的力学模型。其中， m 为等效质量， k_1 、 k_2 分别为铣刀系和工件的弹簧刚度， f 为粘性阻尼系数， $x_o(t)$ 为输出位移。试建立其以 $F_i(t)$ 为输入、 $x_o(t)$ 为输出的微分方程。

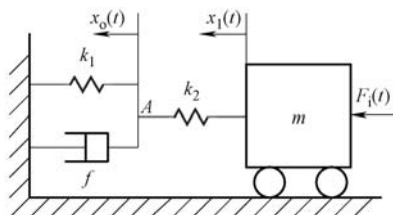


图 2-2 质量-弹簧-阻尼系统

解 对系统进行受力分析。

1) 对质量块进行受力分析, 如图 2-3a 所示, 设质量块的位移为 $x_1(t)$, 所以弹簧 k_2 的压缩量为 $[x_1(t) - x_0(t)]$, 根据牛顿第二定律得

$$F_i(t) - k_2[x_1(t) - x_0(t)] = m\ddot{x}_1(t)$$

2) 对连接点 A 进行受力分析, 如图 2-3b 所示, 列出如下平衡方程

$$k_2[x_1(t) - x_0(t)] = k_1x_0(t) + f\dot{x}_0(t)$$

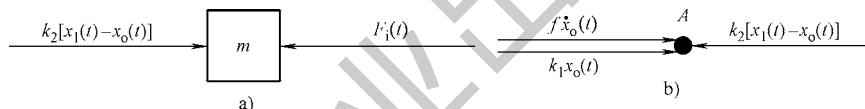


图 2-3 质量-弹簧-阻尼系统力学模型的受力分析

a) 质量块 m b) 连接点 A

所以, 联立上述两式, 得

$$\frac{mf}{k_2}\ddot{x}_0(t) + \left(\frac{mk_1}{k_2} + m\right)\ddot{x}_0(t) + f\dot{x}_0(t) + k_1x_0(t) = F_i(t)$$

例 2-2 机械式加速度计用于测量运动物体的加速度。测量时, 加速度计的框架固定在待测的运动物体上, 当运动物体做加速运动时, 该框架随之做同样的加速运动, 具体的工作原理如图 2-4 所示。其中, $x(t)$ 为运动物体 (即加速度计框架) 相对于某固定参照物 (例如地面) 的位移, 简称为 x ; $y(t)$ 为质量块 m 相对于框架的位移 (可以从刻度线上读出), 简称为 y 。 x 和 y 的正方向如图中所示。试建立机械式加速度计的微分方程。

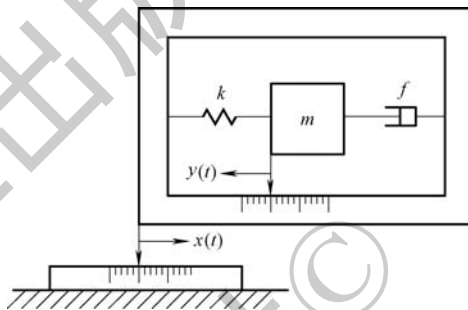


图 2-4 加速度计原理图

解 由于 y 是相对于框架而度量的, 所以质量块 m 相对于地面的位移为 $(y-x)$, 于是根据牛顿第二定律可得

$$m \frac{d^2(y-x)}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

上式可改写为

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = m \frac{d^2x}{dt^2} = ma$$

式中, a 为运动物体的加速度, 即加速度计的输入。

说明: 从上述微分方程分析可知, 如果输入一个恒加速度, 则在稳定情况下其输出 y 也是常数, 从而其导数就为零, 此时加速度计质量块 m 的输入加速度 a 正比于稳态输出位移 y , 即可用 y 值来衡量其加速度的大小; 如果输入加速度不是常量, 而是随时间变化的, 则式中的 $\frac{dy}{dt}$ 和 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 均不为零。

2.1.2 电气系统的微分方程

电气系统的微分方程可根据欧姆定律、基尔霍夫定律、电磁感应定律等基本物理规律推导。在电气系统中，电阻 R 、电感 L 和电容 C 是电路中的三种基本元件，如图 2-5 所示。

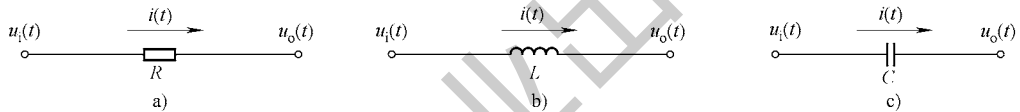


图 2-5 电气系统三种基本元件

$$\text{a) } u_i(t) - u_o(t) = Ri(t) \quad \text{b) } u_i(t) - u_o(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{c) } i(t) = C \frac{d[u_i(t) - u_o(t)]}{dt}$$

欧姆定律：在电压和电流取关联参考方向下，任何时刻线性电阻两端的电压与流过该电阻的电流成正比。用公式可表示为

$$u(t) = Ri(t) \quad (2-4)$$

式中， $u(t)$ 为电阻两端的电压； R 为电阻的阻值； $i(t)$ 为流过电阻的电流。

基尔霍夫电流定律：在任一瞬时，流入电路中任一节点的各支路电流之和等于从该节点流出的各支路电流之和。若把流入节点的支路电流取正号，流出节点的支路电流取负号，则基尔霍夫电流定律用公式可表示为

$$\sum i(t) = 0 \quad (2-5)$$

基尔霍夫电压定律：从回路中任意一点出发，以顺时针方向或逆时针方向沿回路循环一周，则在这个方向上的电位降之和等于电位升之和。若规定电位降取正号，电位升取负号，则基尔霍夫电压定律用公式可表示为

$$\sum u(t) = 0 \quad (2-6)$$

电磁感应定律：电路中感应电动势的大小和通过导体回路的磁通量的变化率成正比。用公式可表示为

$$e(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (2-7)$$

式中， $e(t)$ 为电路中的感应电动势； $\Phi(t)$ 为通过导体回路的磁通量。

$\Phi(t)$ 的正方向与感应电动势 $e(t)$ 的正方向成右手螺旋关系。

下面通过例题加以说明。

例 2-3 如图 2-6 所示的无源电路系统中， $u_i(t)$ 为输入电压， $u_o(t)$ 为输出电压，试建立其微分方程。

解 根据欧姆定律和基尔霍夫定律，有

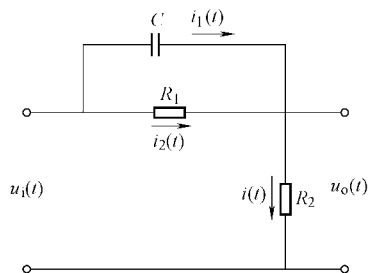


图 2-6 无源电路系统

$$\begin{cases} i(t) = i_1(t) + i_2(t) & (2-8) \\ u_i(t) = u_o(t) + R_1 i_2(t) & (2-9) \\ i_1(t) = C \frac{d[u_i(t) - u_o(t)]}{dt} & (2-10) \\ u_o(t) = R_2 i(t) & (2-11) \end{cases}$$

由式(2-9)得

$$i_2(t) = \frac{u_i(t) - u_o(t)}{R_1} \quad (2-12)$$

由式(2-11)得

$$i(t) = \frac{u_o(t)}{R_2} \quad (2-13)$$

将式(2-10)、式(2-12)、式(2-13)代入式(2-8)，得

$$\frac{u_o(t)}{R_2} = C \left[\frac{du_i(t)}{dt} - \frac{du_o(t)}{dt} \right] + \frac{u_i(t) - u_o(t)}{R_1}$$

即

$$R_1 C \frac{du_o(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} u_o(t) = R_1 C \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t)$$

例 2-4 在图 2-7 所示的有源电路系统中， $u_i(t)$ 为输入电压， $u_o(t)$ 为输出电压， K_0 为运算放大器开环放大倍数。试建立其微分方程。

解 设运算放大器的反相输入端为 A 点。因为一般 K_0 值很大，又 $u_o(t) = -K_0 u_A(t)$ ，所以，A 点电位可表示为

$$u_A(t) = -\frac{u_o(t)}{K_0} \approx 0 \quad (2-14)$$

因为一般运算放大器的输入阻抗很高，所以

$$i_1(t) \approx i_2(t) \quad (2-15)$$

据此可列出

$$\frac{u_i(t)}{R} = -C \frac{du_o(t)}{dt}$$

即

$$RC \frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t)$$

例 2-5 如图 2-8 所示的电枢控制式直流电动机系统中， $e_i(t)$ 为电动机电枢输入电压； $\theta_o(t)$ 为电动机输出转角； R_a 为电枢绕组的电阻； L_a 为电枢绕组的

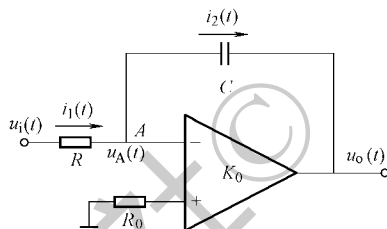


图 2-7 有源电路系统

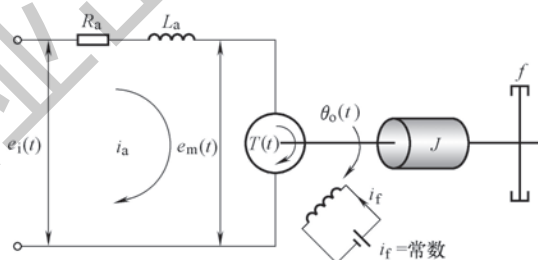


图 2-8 电枢控制式直流电动机

电感； $i_a(t)$ 为流过电枢绕组的电流； $e_m(t)$ 为电动机感应电势； $T(t)$ 为电动机转矩； J 为电动机及负载折合到电动机轴上的转动惯量； f 为电动机及负载折合到电动机轴上的粘性阻尼系数。试建立其微分方程。

解 根据基尔霍夫定律，有

$$e_i(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_m(t) \quad (2-16)$$

根据磁场对载流线圈的作用定律，有

$$T(t) = K_T i_a(t) \quad (2-17)$$

式中， K_T 为电动机转矩常数。

根据电磁感应定律，有

$$e_m(t) = K_e \frac{d\theta_o(t)}{dt} \quad (2-18)$$

式中， K_e 为反电动势常数。

根据牛顿第二定律，有

$$T(t) - f \frac{d\theta_o(t)}{dt} = J \frac{d^2\theta_o(t)}{dt^2} \quad (2-19)$$

将式(2-17)代入式(2-19)，得

$$i_a(t) = \frac{J}{K_T} \frac{d^2\theta_o(t)}{dt^2} + \frac{f}{K_T} \frac{d\theta_o(t)}{dt} \quad (2-20)$$

将式(2-18)、式(2-20)代入式(2-16)，得

$$L_a J \frac{d^3\theta_o(t)}{dt^3} + (L_a f + R_a J) \frac{d^2\theta_o(t)}{dt^2} + (R_a f + K_T K_e) \frac{d\theta_o(t)}{dt} = K_T e_i(t)$$

在工程应用中，由于电枢电感 L_a 较小，通常忽略不计，因而系统微分方程可简化为

$$R_a J \frac{d^2\theta_o(t)}{dt^2} + (R_a f + K_T K_e) \frac{d\theta_o(t)}{dt} = K_T e_i(t)$$

当电枢电感 L_a 和电阻 R_a 均较小，都忽略时，系统微分方程可进一步简化为

$$K_e \frac{d\theta_o(t)}{dt} = e_i(t)$$

2.1.3 液压系统的线性化微分方程

由于液压元件比电气元件更为非线性，在数学描述上更加复杂，为便于分析，往往在一定条件下，将非线性系统进行线性化处理。

例 2-6 设有一滑阀控制液压缸的液压伺服系统，如图 2-9 所示。其工作原理是当阀芯右移时，高压油进入液压缸左腔，这时活塞推动负载右移；反之，当阀芯左移时，活塞推动负载左移。其中， x 为阀芯位移输入； y 为液压缸活塞位移输出； q_L 为负载流量； q_1 、 q_2 分别为液压缸左、右腔的输入、输出流量； p_L 为负载压差； p_s 为供油压力； m 为负载质量； A

为活塞工作面积； d 为阀芯直径。试建立系统的压力-流量特性的线性化微分方程。

解 由液压流体力学可知

$$q_1 = C_d A_0 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (2-21)$$

式中， C_d 为阀口流量系数； A_0 为阀口过流面积，若为全周矩形开口，有 $A_0 = x\pi d$ ； Δp 为阀口压力降； ρ 为油液密度。

若阀口结构完全相同且对称，不考虑阀和缸的泄漏，则 $q_1 = q_2 = q_L$ ， $\Delta p = p_s - p_1 = p_2 - p_0 = p_2$ ，于是有 $p_s = p_1 + p_2$ 。因为 $p_L = p_1 - p_2$ ，所以可以导出 $\Delta p = \frac{p_s - p_L}{2}$ ，于是式(2-21)变为

$$q_L = C_d x \pi d \sqrt{\frac{p_s - p_L}{\rho}} \quad (2-22)$$

或

$$q_L = f(p_L, x) \quad (2-23)$$

式(2-23)称为滑阀的静态特性方程，是一个非线性函数，如图 2-10 所示。

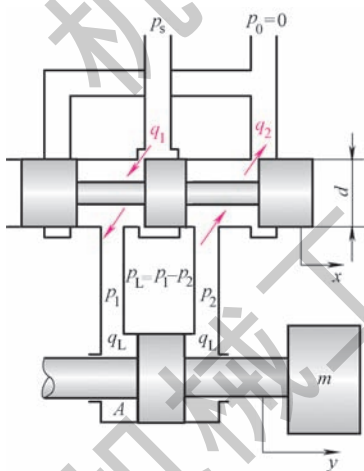


图 2-9 滑阀控制液压缸的液压伺服系统

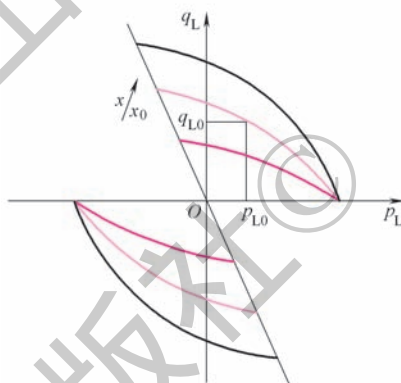


图 2-10 $q_L = f(p_L, x)$ 曲线

设阀的额定工作点参量为 p_{L0} 和 x_0 ，则

$$q_{L0} = f(p_{L0}, x_0) \quad (2-24)$$

将式(2-22)在额定工作点附近展成泰勒级数，有

$$q_L = f(p_{L0}, x_0) + \left[\frac{\partial f(p_L, x)}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_0 \\ p_L=p_{L0}}} \Delta x + \left[\frac{\partial f(p_L, x)}{\partial p_L} \right]_{\substack{x=x_0 \\ p_L=p_{L0}}} \Delta p_L + \dots \quad (2-25)$$

将式(2-25)减去式(2-24)，并舍去高阶项，得压力-流量特性的线性化方程为

$$\Delta q_L = K_q \Delta x - K_c \Delta p_L \quad (2-26)$$

式中, K_q 为流量增益, $K_q = \left. \frac{\partial f(p_L, x)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ p_L=p_{L0}}}$; K_c 为流量-压力系数, $K_c = \left. \frac{\partial f(p_L, x)}{\partial p_L} \right|_{\substack{x=x_0 \\ p_L=p_{L0}}}$ 。

当不考虑泄漏时, 液压缸流量的连续性方程为

$$\Delta q_L = A \frac{d(\Delta y)}{dt} \quad (2-27)$$

当不考虑阻尼力等时, 液压缸的力平衡方程为

$$\Delta p_L A = m \frac{d^2(\Delta y)}{dt^2} \quad (2-28)$$

将式(2-26)、式(2-27)和式(2-28)联立, 消去中间变量, 即得系统压力-流量特性的线性化微分方程为

$$\frac{K_c m}{A} \frac{d^2(\Delta y)}{dt^2} + A \frac{d(\Delta y)}{dt} = K_q \Delta x$$

在经典控制理论学习阶段, 对于系统的微分方程线性化主要采用将微分方程在某一工作点展开成泰勒级数的方法完成。在系统线性化的过程中, 有以下几点需要注意:

- 1) 线性化是相对某一额定工作点的, 工作点不同, 所得的方程系数也往往不同。
- 2) 变量的偏差越小, 则线性化精度越高。
- 3) 增量方程中可认为其初始条件为零, 即广义坐标原点平移到额定工作点处。
- 4) 线性化只用于没有间断点、折断点的单值函数。

由以上一些例子可总结出**列写系统微分方程的一般步骤**:

1) 确定系统或各元件的输入、输出。对于一个系统或元件而言, 应按系统信号传递情况来确定输入、输出。

2) 按照信号的传递顺序, 从系统的输入端开始, 根据各变量所遵循的定律, 列出在运动过程中各部分(一个元件、多个元件或一个简单系统)的微分方程。按工作条件列出, 忽略一些次要因素, 并考虑相邻元件间是否存在负载效应。对非线性项应进行线性化处理。

3) 将各部分的微分方程联立, 消去中间变量, 最后得到描述系统输入、输出之间关系的微分方程, 方程中只含输入、输出以及系统参量。

4) 一般情况下, 将整理所得的微分方程式写为标准形式, 即与输出相关的各项放在方程的左侧, 与输入相关的各项放在方程的右侧, 方程两端变量的导数项均按降幂排列。

2.1.4 机电液系统的相似性

数学模型相同的物理系统称为相似系统。在相似系统的数学模型中, 作用相同的变量称为相似变量。表 2-1 为相似系统(机械平移系统、机械回转系统、电气系统和液压系统)的相似变量。

表 2-1 相似系统的相似变量

机械平移系统	机械回转系统	电气系统	液压系统
力 F	转矩 T	电压 U	压力 p
质量 m	转动惯量 J	电感 L	液感 L_h
粘性阻尼系数 f	粘性阻尼系数 f	电阻 R	液阻 R_h
弹簧刚度 k	扭转弹簧刚度 k	电容的倒数 $1/C$	液容的倒数 $1/C_h$
线位移 y	角位移 θ	电荷 q	容积 V
速度 v	角速度 ω	电流 i	流量 q

相似系统的特点是可以将一种物理系统研究的结论推广到其他相似系统中去。利用相似系统的这一特点, 可以进行模拟研究, 即用一种比较容易实现的系统(如电气系统)模拟其他较难实现的系统。

2.2 拉普拉斯变换及反变换

应用拉普拉斯变换(Laplace Transform), 可将微分方程转换为代数方程, 使系统分析和方程求解大为简化, 因而拉普拉斯变换是分析工程控制系统的基本数学方法之一。

2.2.1 拉普拉斯变换及其运算法则

1. 拉普拉斯变换的定义

时间函数 $f(t)$, 当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$; 当 $t \geq 0$ 时, $f(t)$ (称原函数) 的拉普拉斯变换记为 $L[f(t)]$ 或 $F(s)$ (称象函数), 且定义为

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2-29)$$

式中, $s = \sigma + j\omega$ 。

若式(2-29)的积分收敛于一确定值, 则函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 存在, 这时 $f(t)$ 必须满足:

- 1) 在任一有限区间内, $f(t)$ 分段连续, 只有有限个间断点。
- 2) 当时间 $t \rightarrow \infty$, $f(t)$ 不超过某一指数函数, 即满足

$$|f(t)| \leq M e^{at}$$

式中, M 、 a 为实常数。

在复平面上, 对于满足 $\text{Re}(s) > a$ [$\text{Re}(s)$ 表示 s 的实部] 的所有复数 s 都使式(2-29)的积分绝对收敛, 则 $\text{Re}(s) > a$ 为拉普拉斯变换的定义域。

例 2-7 单位阶跃函数的拉普拉斯变换。

解 单位阶跃函数如图 2-11a 所示, 定义为

$$1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

由式(2-29)可求得 $1(t)$ 的拉普拉斯变换为

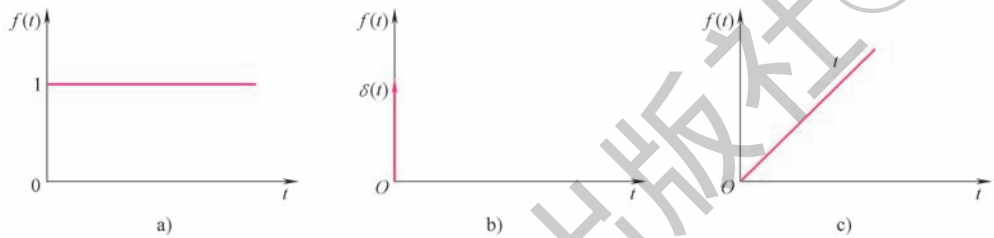


图 2-11 函数曲线

a) 单位阶跃函数 b) 单位脉冲函数 c) 单位斜坡函数

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

例 2-8 单位脉冲函数的拉普拉斯变换。

解 单位脉冲函数如图 2-11b 所示，定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \infty & (t = 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

且 $\delta(t)$ 有如下特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

式中 $f(0)$ 为 $t=0$ 时刻的 $f(t)$ 的函数值。

根据式(2-29)求得 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

例 2-9 单位斜坡函数的拉普拉斯变换。

解 单位斜坡函数如图 2-11c 所示，定义为

$$t = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases}$$

由式(2-29)可求得 t 的拉普拉斯变换为

$$L[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -t \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt = -\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

例 2-10 指数函数 e^{at} 的拉普拉斯变换。

解 由式(2-29)可求得 e^{at} 的拉普拉斯变换为

$$L[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

例 2-11 正弦函数 $\sin \omega t$ 和余弦函数 $\cos \omega t$ 的拉普拉斯变换。

解 根据欧拉公式，有

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta, \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

则

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}, \quad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

于是，可以利用例 2-10 指数函数拉普拉斯变换的结果，求出正弦函数和余弦函数的拉普拉斯变换为

$$L[\sin\omega t] = \int_0^{\infty} \sin\omega t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[\cos\omega t] = \int_0^{\infty} \cos\omega t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

常用函数的拉普拉斯变换见表 2-2。

表 2-2 常用函数的拉普拉斯变换

序号	$f(t)$	$F(s)$	序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1	6	$t^n e^{-at} (n=1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
2	1(t)	$\frac{1}{s}$	7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	8	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
4	$t^n (n=1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	9	$e^{-at} \sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	10	$e^{-at} \cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

2. 拉普拉斯变换的运算法则

(1) **线性定理** 拉普拉斯变换是一个线性变换，若有常数 k_1 、 k_2 ，函数 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ ，则

$$L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)] = k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s) \quad (2-30)$$

(2) **延迟定理** 设 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$ ，对任一正实数 T 有

$$L[f(t-T)] = e^{-Ts} F(s) \quad (2-31)$$

式中， $f(t-T)$ 为函数 $f(t)$ 的延时函数，延时时间为 T ，如图 2-12 所示。

证明：设 $(t-T) = \tau$ ，则

$$\begin{aligned} L[f(t-T)] &= \int_0^{\infty} f(t-T) e^{-st} dt = \int_{-T}^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+T)} d\tau = \\ &= e^{-Ts} \left[\int_{-T}^0 f(\tau) e^{-s\tau} d\tau + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] = \\ &= e^{-Ts} F(s) \end{aligned}$$

(3) **位移定理** 设 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$ ，对任一常数 a (实数或复数) 有

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (2-32)$$

证明：

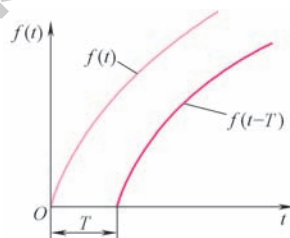


图 2-12 延时函数

$$L[e^{-at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a)$$

(4) **微分定理** 设 $f^{(n)}(t)$ 表示 $f(t)$ 的 n 阶导数, $n=1, 2, \dots$, $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$, 则

$$L[f^{(1)}(t)] = sF(s) - f(0) \quad (2-33)$$

式中, $f(0)$ 为当 $t \rightarrow 0$ 时的 $f(t)$ 值。

证明: 由分部积分法得

$$\int u dv = uv - \int v du$$

令 $e^{-st} = u$ 、 $f(t) = v$ 、 $dv = f^{(1)}(t) dt$, 则

$$\begin{aligned} L[f^{(1)}(t)] &= \int_0^{\infty} f^{(1)}(t)e^{-st}dt = e^{-st}f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt = \\ &= s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt - f(0) = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

可进一步推出 $f(t)$ 的 $2 \sim n$ 阶导数的拉普拉斯变换为

$$L[f^{(2)}(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0)$$

⋮

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (2-34)$$

式中, $f^{(i)}(0)$ 为 $f(t)$ 的第 i 阶导数在 $t \rightarrow 0$ 时的取值, $i=1, 2, \dots, n$ 。

(5) **积分定理** 设 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$, 则

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}f^{(-1)}(0) \quad (2-35)$$

式中, $f^{(-1)}(0)$ 为当 $t \rightarrow 0$ 时 $\int_0^t f(t) dt$ 的值。

证明: 由分部积分公式得

$$\begin{aligned} L\left[\int_0^t f(t) dt\right] &= \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt\right] e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(t) dt \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \left[\int_0^t f(t) dt\right] \Big|_{t=0} = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0) \end{aligned}$$

依次可推导出

$$L\left[\int_0^t \int_0^t f(t) (dt)^2\right] = \frac{1}{s^2} F(s) + \frac{1}{s^2} f^{(-1)}(0) + \frac{1}{s} f^{(-2)}(0)$$

⋮

$$L\left[\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s) + \frac{1}{s^n} f^{(-1)}(0) + \frac{1}{s^{n-1}} f^{(-2)}(0) + \dots + \frac{1}{s} f^{(-n)}(0) \quad (2-36)$$

式中, $f^{(-i)}(0)$ 为 $f(t)$ 的第 i 重积分在 $t \rightarrow 0$ 时的取值, $i=1, 2, \dots, n$ 。

(6) **初值定理** 若 $f(t)$ 及其一阶导数均可拉普拉斯变换, 则 $f(t)$ 的初值为

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2-37)$$

证明：由微分定理得

$$\int_0^{\infty} f^{(1)}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

令 $s \rightarrow \infty$ ，对上式两边取极限

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\infty} f^{(1)}(t) e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)]$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时， $e^{-st} \rightarrow 0$ ，则

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = 0$$

即

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

(7) **终值定理** 若 $f(t)$ 及其一阶导数均可拉普拉斯变换，则 $f(t)$ 的终值为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2-38)$$

证明：由微分定理得

$$\int_0^{\infty} f^{(1)}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

令 $s \rightarrow 0$ ，对上式两边取极限

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} f^{(1)}(t) e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

上式左边

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} f^{(1)}(t) e^{-st} dt \right] &= \int_0^{\infty} f^{(1)}(t) \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f^{(1)}(t) dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d[f(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] \end{aligned}$$

与前式右边比较，消去 $f(0)$ 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

要注意终值定理的使用条件，即 $sF(s)$ 的全部极点除了坐标原点外应全部在左半 s 平面上（不包括虚轴）。

2.2.2 拉普拉斯反变换及其计算方法

1. 拉普拉斯反变换的定义

已知时间函数 $f(t)$ 对应的象函数 $F(s)$ ，利用拉普拉斯反变换 (Inverse Laplace Transform) 求 $f(t)$ ，记作 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ ，定义为

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{r-j\infty}^{r+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (2-39)$$

式中， r 为大于 $F(s)$ 的所有奇异点实部的实常数（所谓奇异点，即 $F(s)$ 在该点不解析，也就是 $F(s)$ 在该点及其邻域不处处可导）。

2. 拉普拉斯反变换的计算方法

在工程应用中，对于简单的 $F(s)$ ，可直接利用表 2-2 查出相应的 $f(t)$ 。对于复杂的

$F(s)$, 不能直接查表时, 通常用下面介绍的部分分式法, 先将一个复杂的象函数 $F(s)$ 变成数个简单的标准形式象函数之和, 然后再通过查表, 分别查出各个标准形式象函数对应的原函数, 其和即为所求。

$F(s)$ 通常可表达为复数 s 的有理分式, 即

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (n \geq m) \quad (2-40)$$

式(2-40)的分母多项式等于零的方程为特征方程, 即 $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$ 。其根 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ (实根或复根) 又称为该有理分式 $F(s)$ 的极点, 所以对 $F(s)$ 的分母进行因式分解, 有

$$F(s) = \frac{\frac{N(s)}{a_n}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} s + \frac{a_0}{a_n}} = \frac{\frac{N(s)}{a_n}}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} \quad (2-41)$$

用部分分式法将式(2-41)整理成简单分式之和的形式, 并分三种情况进行讨论。

(1) $D(s) = 0$ 无重根的情况 将式(2-41)化为部分分式形式, 则有

$$F(s) = \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \dots + \frac{k_n}{s-s_n} = \sum_{i=1}^n k_i \frac{1}{s-s_i} \quad (2-42)$$

式中, k_i 为极点 $s = s_i$ 处的留数, $i=1, 2, \dots, n$ 。

求解该情况下的 $F(s)$ 对应的原函数 $f(t)$, 具体步骤如下:

1) 求解留数 k_i 。采用求取极点处留数的方法求解, 将式(2-42)两边都乘以 $(s-s_i)$, 并将 $s=s_i$ 代入式(2-42)中, 得

$$\frac{N(s)}{a_n (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_i)\dots(s-s_n)} (s-s_i) \Big|_{s=s_i} = k_i \quad (2-43)$$

2) 求解原函数 $f(t)$ 。由表 2-2 可知

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s-s_i} \right] = e^{s_i t}$$

从而得 $F(s)$ 的原函数为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n k_i \frac{1}{s-s_i} = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad (2-44)$$

例 2-12 求 $F(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ 的拉普拉斯反变换。

解 将 $F(s)$ 转化为部分分式, 则有

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3}$$

用式(2-43)求留数 k_1 、 k_2 , 即

$$k_1 = \left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} (s+2) \right]_{s=-2} = -1$$

$$k_2 = \left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} (s+3) \right]_{s=-3} = 2$$

根据式(2-44)求得 $F(s)$ 的原函数为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1} \left[\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \right] = 2e^{-3t} - e^{-2t}$$

(2) $D(s)=0$ 的根中有共轭复根的情况 假设 $D(s)=0$ 有一对共轭复根, 则式(2-41)可写成

$$F(s) = \frac{k_{11}s+k_{12}}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)} + \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{k_{n-2}}{s-s_{n-2}} \quad (2-45)$$

求解该情况下 $F(s)$ 对应的原函数 $f(t)$, 具体步骤如下:

1) 求解留数 k_i 。式(2-45)中的 k_1 、 k_2 、 \cdots 、 k_{n-2} 等留数仍按上述无重根的方法求得, 留数 k_{11} 和 k_{12} 可由如下方法求得:

式(2-45)两边分别乘以 $(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)$, 同时令 $s=\sigma+j\omega$ (或令 $s=\sigma-j\omega$), 得

$$k_{11}s+k_{12} \Big|_{s=\sigma+j\omega} = F(s)(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega) \Big|_{s=\sigma+j\omega} \quad (2-46)$$

分别令式(2-46)两边的实部和虚部对应相等, 即可求得 k_{11} 和 k_{12} 。

2) 求解原函数 $f(t)$ 。针对 $F(s)$ 中 $\frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{k_{n-2}}{s-s_{n-2}}$ 对应的原函数, 仍按上述无重根的方法求解; 针对 $\frac{k_{11}s+k_{12}}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$, 通过配方, 转化成正弦、余弦的象函数形式, 最后查表 2-2 并求和, 得该部分对应的原函数。

将上述两部分对应的原函数求和, 即得 $F(s)$ 对应的原函数 $f(t)$ 。

例 2-13 求象函数 $F(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)}$ 的原函数。

解 下面用两种方法求解。

方法一: 将 $F(s)$ 转化为部分分式, 则有

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{k_{11}s+k_{12}}{s^2+s+1} + \frac{k_1}{s} \quad (2-47)$$

对上式分母的 s^2+s+1 因式分解, 得

$$s^2+s+1 = \left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

将式(2-44)的两边都乘以 (s^2+s+1) , 并令 $s = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得

$$\frac{1}{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = k_{11} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + k_{12}$$

可简化为

$$-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = k_{11} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + k_{12} = \left(-\frac{1}{2}k_{11} + k_{12} \right) - j\frac{\sqrt{3}}{2}k_{11}$$

令上式两边的实部和虚部分别相等, 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}k_{11} + k_{12} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}k_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

解得

$$k_{11} = -1, \quad k_{12} = -1$$

为确定留数 k_1 , 式(2-47)两边都乘以 s , 并令 $s=0$, 得

$$k_1 = \left[\frac{s}{s(s^2+s+1)} \right]_{s=0} = 1$$

可求得 $F(s)$ 的部分分式为

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

则 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = 1 - e^{-0.5t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

方法二: 将 $F(s)$ 转化为部分分式, 则有

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{k_{11}s+k_{12}}{s^2+s+1} + \frac{k_1}{s}$$

对上式右边进行通分, 得

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{(k_1+k_{11})s^2 + (k_1+k_{12})s + k_1}{s(s^2+s+1)}$$

等式左右两边对应相等, 即

$$1 = (k_1+k_{11})s^2 + (k_1+k_{12})s + k_1$$

对应项系数相等, 得

$$\begin{cases} k_1+k_{11} = 0 \\ k_1+k_{12} = 0 \\ k_1 = 1 \end{cases}$$

解得

$$k_1 = 1, \quad k_{11} = -1, \quad k_{12} = -1$$

可求得 $F(s)$ 的部分分式为

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

则 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = 1 - e^{-0.5t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

由此可知, 上述两种解法结果相同。如果将上式进行整理, 可得

$$f(t) = 1 - \frac{e^{-0.5t}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) = 1 - \frac{e^{-0.5t}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\pi}{3} \right) \quad (2-48)$$

分析式(2-48)(即用拉普拉斯反变换方法求得的 $f(t)$), 可以发现: ①含有常数项 1; ②含有指数函数和正弦函数。指数函数的指数 -0.5 、正弦函数的频率 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、正弦函数的相角 $\frac{\pi}{3}$ 之间是否有什么关系? $f(t)$ 这种形式涉及第 3 章的欠阻尼二阶系统情况的单位阶跃响应。

(3) $D(s) = 0$ 有重根的情况 设 $D(s) = 0$ 有 ρ 重根 s_1 , 则

$$F(s) = \frac{k_{11}}{(s-s_1)^\rho} + \frac{k_{12}}{(s-s_1)^{\rho-1}} + \cdots + \frac{k_{1(\rho-1)}}{(s-s_1)^2} + \frac{k_{1\rho}}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{k_{n-\rho+1}}{s-s_{n-\rho+1}} \quad (2-49)$$

求解该情况下的 $F(s)$ 对应的原函数 $f(t)$, 具体步骤如下:

1) 求解留数 k_i 。式(2-49)中的 k_2 、 k_3 、 \cdots 、 $k_{n-\rho+1}$ 等留数仍按上述无重根的方法求得。而留数 k_{11} 、 k_{12} 、 \cdots 、 $k_{1\rho}$ 可按下述方法求得

$$\begin{aligned} k_{11} &= F(s)(s-s_1)^\rho \Big|_{s=s_1} \\ k_{12} &= \frac{d}{ds} [F(s)(s-s_1)^\rho] \Big|_{s=s_1} \\ k_{13} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s-s_1)^\rho] \Big|_{s=s_1} \\ &\vdots \\ k_{1\rho} &= \frac{1}{(\rho-1)!} \frac{d^{(\rho-1)}}{ds^{(\rho-1)}} [F(s)(s-s_1)^\rho] \Big|_{s=s_1} \end{aligned} \quad (2-50)$$

2) 求解原函数 $f(t)$ 。针对 $F(s)$ 中 $\frac{k_{1\rho}}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{k_{n-\rho+1}}{s-s_{n-\rho+1}}$ 对应的原函数, 仍按上述

无重根的方法求解；针对 $\frac{k_{11}}{(s-s_1)^\rho} + \frac{k_{12}}{(s-s_1)^{\rho-1}} + \dots + \frac{k_{1(\rho-1)}}{(s-s_1)^2}$ ，将各分式整理成 $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ 的形式并求和，即得该部分对应的原函数。

将上述两部分对应的原函数求和，即得 $F(s)$ 对应的原函数 $f(t)$ 。

例 2-14 求 $F(s) = \frac{1}{s(s+2)^3(s+3)}$ 的拉普拉斯反变换。

解

$$F(s) = \frac{k_{11}}{(s+2)^3} + \frac{k_{12}}{(s+2)^2} + \frac{k_{13}}{s+2} + \frac{k_2}{s} + \frac{k_3}{s+3}$$

根据式 (2-50) 和式 (2-43) 求得

$$\begin{aligned} k_{11} &= F(s)(s+2)^3 \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s(s+3)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \\ k_{12} &= \frac{d}{ds} [F(s)(s+2)^3] \Big|_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right] \Big|_{s=-2} = \frac{-(2s+3)}{s^2(s+3)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{4} \\ k_{13} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s+2)^3] \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{s(s+3)} \right] \Big|_{s=-2} = -\frac{3}{8} \\ k_2 &= F(s)s \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+2)^3(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{24} \\ k_3 &= F(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{s(s+2)^3} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

可求得 $F(s)$ 的部分分式为

$$F(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(s+2)^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{3}{8} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{24} \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+3}$$

分别查表，可求得 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换为

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{4}t^2e^{-2t} + \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{3}{8}e^{-2t} + \frac{1}{24} + \frac{1}{3}e^{-3t} = \\ &= \frac{1}{4} \left(-t^2 + t - \frac{3}{2} \right) e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{24} \end{aligned}$$

3. 用拉普拉斯反变换求解系统输出

由 2.1 节可知，控制系统的微分方程一般为常微分方程，即

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

而微分方程的解（即系统输出 $c(t)$ ）是我们所关注的，下面结合实例说明。

例 2-15 系统的微分方程为 $\ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) = 6\dot{r}(t) + 6r(t)$ ，其中 $\dot{c}(0) = 0$ 、 $c(0) = 0$ 、 $r(t) = 1(t)$ 、 $t \geq 0$ ，试求解系统的输出 $c(t)$ 。

解 下面用两种方法求解。

方法一：采用高等数学中解常系数非齐次线性微分方程的方法求解。

上述方程是二阶常系数非齐次线性微分方程，且因为 $r(t) = 1(t)$ ，所以方程右侧

$$6\dot{r}(t) + 6r(t) = 6$$

方程的通解为

$$c(t) = c_1(t) + c_{ss}(t)$$

式中， $c_1(t)$ 为方程对应的齐次方程通解； $c_{ss}(t)$ 为方程对应的特解。

与方程对应的齐次方程为

$$\ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) = 0 \quad (2-51)$$

式(2-51)对应的特征方程为

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \quad (2-52)$$

式(2-52)有两个实根，分别为 $s_1 = -2$ 、 $s_2 = -3$ ，所以式(2-51)的通解为

$$c_1(t) = ae^{-2t} + be^{-3t}$$

由于 $s=0$ 不是式(2-52)的根，所以应设特解为

$$c_{ss}(t) = b_0$$

式中， b_0 为常数。

把特解代入方程，得

$$6b_0 = 6$$

由此得 $b_0 = 1$ ，所以求得一个特解为

$$c_{ss}(t) = 1$$

所以方程的通解 $c(t)$ 为

$$c(t) = ae^{-2t} + be^{-3t} + 1$$

由于 $\dot{c}(0) = 0$ 、 $c(0) = 0$ ，所以

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ -2a - 3b = 0 \end{cases}$$

解得 $a = -3$ 、 $b = -2$ ，所以

$$c(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

方法二：采用拉普拉斯反变换的方法求解。

将方程两边进行拉普拉斯变换，得

$$s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 5[sC(s) - c(0)] + 6C(s) = 6[sR(s) - r(0)] + 6R(s)$$

将 $\dot{c}(0) = 0$ 、 $c(0) = 0$ 、 $r(0) = 1$ 、 $R(s) = \frac{1}{s}$ 代入并整理，得

$$C(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

根据式(2-50)和式(2-43)求得

$$k_1 = \left. \frac{6}{s(s+2)(s+3)} s \right|_{s=0} = 1$$

$$k_2 = \left. \frac{6}{s(s+2)(s+3)} (s+2) \right|_{s=-2} = -3$$

$$k_2 = \frac{6}{s(s+2)(s+3)}(s+3) \Big|_{s=-3} = 2$$

可求得 $F(s)$ 的部分分式为

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

对上式进行拉普拉斯反变换, 得

$$c(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

显然, 采用拉普拉斯反变换的方法求解系统输出更为简单、快捷。用拉普拉斯反变换求解系统输出 $c(t)$ 的步骤如下:

1) 考虑初始条件, 对常微分方程进行拉普拉斯变换, 将其转换为代数方程。

2) 求出 $C(s)$ 的极点和极点对应的留数 k_i , 然后对部分分式分别进行拉普拉斯反变换, 并将各部分对应的原函数求和, 从而求出常微分方程的解, 即系统的输出 $c(t)$ 。

系统的输出(或称输出响应) $c(t)$ 是时间的函数, 故又称作时间响应。时间响应将在第3章介绍。

2.3 传递函数及基本环节的传递函数

由2.1节可知, 求解描述系统的微分方程可得其运动规律, 但计算复杂。因而, 在经典控制理论中, 常采用传递函数作为数学模型来描述系统。利用2.2节所阐述的拉普拉斯变换方法, 可将系统的微分方程转化为代数方程, 进而可以得到系统的传递函数。传递函数不仅可以表征系统的动态性能, 还可以用来研究系统的结构、参数变化对系统性能的影响。

2.3.1 传递函数

1. 传递函数的概念

线性定常系统的传递函数(Transfer Function)定义为当初始条件为零时, 输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。

设线性定常系统输入为 $r(t)$ 、输出为 $c(t)$, 则描述系统的常微分方程的一般形式为

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = \\ b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (2-53)$$

式中, $n \geq m$; a_n 、 b_m 均为实数。

当初始条件为零时, 对式(2-53)两边进行拉普拉斯变换, 得

$$\begin{aligned} a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \cdots + a_1 s C(s) + a_0 C(s) = \\ b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \cdots + b_1 s R(s) + b_0 R(s) \end{aligned} \quad (2-54)$$

根据传递函数的定义, 系统的传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2-55)$$

由上述分析可知, 传递函数具有以下特点:

1) 传递函数是一种用系统参数表示输出与输入之间关系的表达式, 它只取决于系统或元件的结构和参数, 而与输入无关。

2) 传递函数不能表征所描述系统的具体物理构成, 不同的物理系统, 只要它们动态特性相同, 就可以用同一传递函数来描述。

3) 传递函数是代数方程, 便于求解和分析。

传递函数分母多项式中 s 的最高幂数代表了系统的阶次, 如 s 的最高幂数为 n , 则该系统为 n 阶系统。

2. 传递函数的零点(Zero)、极点(Pole)和放大系数

(1) **零点 z_j** : 传递函数 $G(s)$ 的分子对应代数方程的根被称为系统的零点, 即

$$N(s) \Big|_{s=z_j(j=1,2,\dots,m)} = 0 \quad (2-56)$$

(2) **极点 p_i** : 传递函数 $G(s)$ 的分母对应代数方程的根被称为系统的极点, 即

$$D(s) \Big|_{s=p_i(i=1,2,\dots,n)} = 0 \quad (2-57)$$

这些零点和极点中当然可以有重零点和重极点。零点和极点是控制理论中重要的概念, 它们在控制系统的分析与设计中有着重要的作用。

(3) **放大系数 K (又称放大倍数、开环增益)**

将式(2-55)所示的传递函数整理成时间常数, 其形式为

$$G(s) = K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} \quad (2-58)$$

式(2-58)中的常数 K 即为该传递函数的放大系数。稳定系统在同一输入的条件下, 放大系数 K 决定着系统的稳态输出值。

例如, 某系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+8}{s^3+5s^2+6s}$$

根据式(2-56)求得该传递函数的零点 $z_1 = -4$, 根据式(2-57)求得该传递函数的极点 $p_1 = 0$ 、 $p_2 = -2$ 、 $p_3 = -3$ 。

将该传递函数整理成如式(2-57)的时间常数形式, 即

$$G(s) = \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{s}{4} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \left(\frac{s}{3} + 1 \right)}$$

可得该传递函数的放大系数 $K = \frac{4}{3}$ 。

由上述分析可知,传递函数可由零点、极点和放大系数确定。

2.3.2 基本环节的传递函数

一个系统可看作由一些基本环节(又称典型环节)组成。环节可以是一个元件,也可以是一个元件的一部分或由几个元件组成。掌握基本环节有助于对复杂系统进行分析和研究。

1. 比例环节(又称放大环节)

输出与输入成正比,输出不失真、不延迟且按比例地反映输入的环节称为比例环节,即

$$c(t) = Kr(t)$$

对上式进行拉普拉斯变换,求得比例环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \quad (2-59)$$

式中, K 为放大系数。

如一个理想的电子放大器的放大系数或增益、齿轮传动的传动比均为比例环节。

2. 积分环节

输出正比于输入的积分的环节称为积分环节,即

$$c(t) = \frac{1}{T} \int r(t) dt$$

对上式进行拉普拉斯变换,求得积分环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts} \quad (2-60)$$

式中, T 为时间常数。

图 2-13 所示为液压缸活塞运动过程,其中, $q(t)$ 为液压缸的输入流量, A 为液压缸活塞有效面积, $x(t)$ 为活塞位移。列出该系统的微分方程,进而通过拉普拉斯变换求得活塞位移 $x(t)$ 对输入流量 $q(t)$ 的传递函数。

系统的微分方程为

$$A \frac{dx(t)}{dt} = q(t)$$

通过拉普拉斯变换求得的传递函数为

$$G(s) = \frac{X(s)}{Q(s)} = \frac{1}{As}$$

该系统的积分时间常数 $T=A$ 。

3. 微分环节

输出正比于输入的微分的环节称为微分环节,即

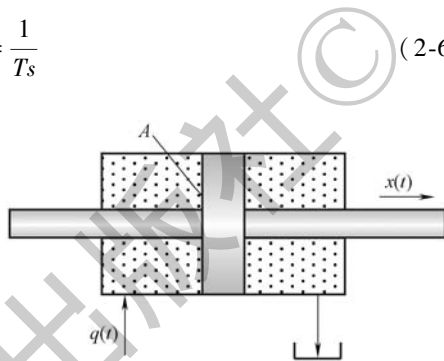


图 2-13 液压缸活塞运动过程

$$c(t) = \tau \dot{r}(t)$$

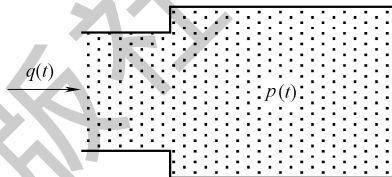
其传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s \quad (2-61)$$

式中, τ 为微分环节的时间常数。

图 2-14 所示为某一容积为 V 的容腔, 装有压力为 $p(t)$ 的可压缩液压油。假设液压油的体积模量 β_e 为常数, 列出该系统的微分方程, 进而通过拉普拉斯变换, 得到以流量 $q(t)$ 为输出、以压力 $p(t)$ 为输入的传递函数。

图 2-14 封闭容腔压力变化



系统微分方程为

$$q(t) = \frac{V}{\beta_e} \frac{dp(t)}{dt}$$

通过拉普拉斯变换求得的传递函数为

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{V}{\beta_e} s$$

该微分环节的时间常数 $\tau = \frac{V}{\beta_e}$ 。

4. 惯性环节

在这类环节中, 因含有储能元件, 故对突变形式的输入信号不能立即输送出去。其微分方程为

$$T\dot{c}(t) + c(t) = Kr(t)$$

对上式进行拉普拉斯变换, 求得惯性环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts+1} \quad (2-62)$$

如图 2-15 所示的 RC 电路, $u_i(t)$ 为输入电压, $u_o(t)$ 为输出电压, $i(t)$ 为电流, R 为电阻, C 为电容。列出该电路的微分方程, 进而通过拉普拉斯变换求得输出对输入的传递函数。

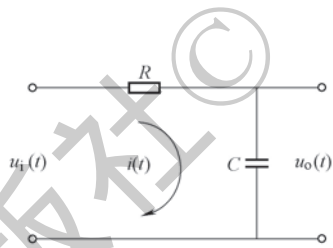


图 2-15 RC 电路

电路的微分方程为

$$\begin{cases} i(t) = C\dot{u}_o(t) \\ u_i(t) = Ri(t) + u_o(t) \end{cases} \quad (2-63)$$

对上式进行拉普拉斯变换, 得

$$\begin{cases} I(s) = CsU_o(s) \\ U_i(s) = RI(s) + U_o(s) \end{cases}$$

整理得电路的传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

该惯性环节的时间常数 $T=RC$ 。

事实上，欧姆定律、基尔霍夫定律等除有前述时域形式公式外，还有复域形式公式，如 $\sum I(s)=0$ 、 $\sum U(s)=0$ 。时域形式公式中的 R 、 L 、 C 在复域形式公式中分别为 R 、 Ls 、 $\frac{1}{Cs}$ ，因此图 2-15 所示 RC 电路的传递函数为

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}I(s)}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs+1}$$

5. 一阶微分环节

描述该环节的微分方程为

$$e(t) = \tau \dot{r}(t) + r(t)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau s + 1 \quad (2-64)$$

6. 振荡环节

振荡环节含有两种独立储能元件，储能元件之间存在能量交换，因而产生振荡；且振荡环节的独立储能元件数目为 2，因而为二阶系统。其微分方程为

$$T^2 \ddot{c}(t) + 2\zeta T \dot{c}(t) + c(t) = Kr(t) \quad (0 \leq \zeta < 1)$$

对上式进行拉普拉斯变换，求得振荡环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (0 \leq \zeta < 1) \quad (2-65)$$

式中， ζ 为阻尼比。

如图 2-16a 所示的二阶系统，其微分方程为

$$m \ddot{x}(t) + f \dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

对上式进行拉普拉斯变换，得

$$ms^2 X(s) + fsX(s) + kX(s) = F(s)$$

整理得其传递函数为

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{f}{k}s + 1} = \frac{1}{k} \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

该振荡环节的时间常数 $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$ ，阻尼比 $\zeta = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$ 。

如图 2-16b 所示的二阶系统，其传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}I(s)}{\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{Ls^2 + RCs + 1} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

该振荡环节的时间常数 $T=\sqrt{L}$ ，阻尼比 $\zeta=\frac{RC}{2\sqrt{L}}$ 。

当上述两例中的阻尼比 ζ 满足 $0\leq\zeta<1$ 时，该二阶系统即为振荡环节。

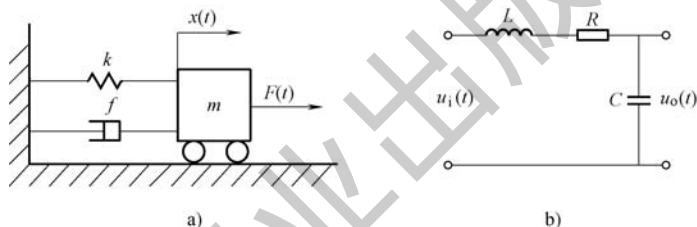


图 2-16 二阶系统

7. 二阶微分环节

描述该环节的微分方程为

$$c(t) = \tau^2 \ddot{r}(t) + 2\zeta\tau \dot{r}(t) + r(t)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 \quad (0 \leq \zeta < 1) \quad (2-66)$$

8. 延时环节

该环节的输出滞后输入时间 τ 后不失真地复现输入，如图 2-12 所示，其微分方程为

$$c(t) = r(t - \tau)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s} \quad (2-67)$$

综上所述，积分环节与微分环节、惯性环节与一阶微分环节、振荡环节与二阶微分环节，其传递函数在形式上是对称的。

2.4 框图及其简化

在控制工程中，人们习惯于用框图来分析和研究控制系统。框图 (Block Diagram) 具体而形象地表示了系统内部各环节的数学模型、各变量之间的相互关系以及信号流向。根据系统框图，并通过一定的框图简化 (等效变换或梅逊公式) 可求得系统传递函数。

2.4.1 框图组成及连接方式

通常，闭环控制系统的框图如图 2-17 所示。下面对框图的构成要素以及连接方式进

行介绍与分析。

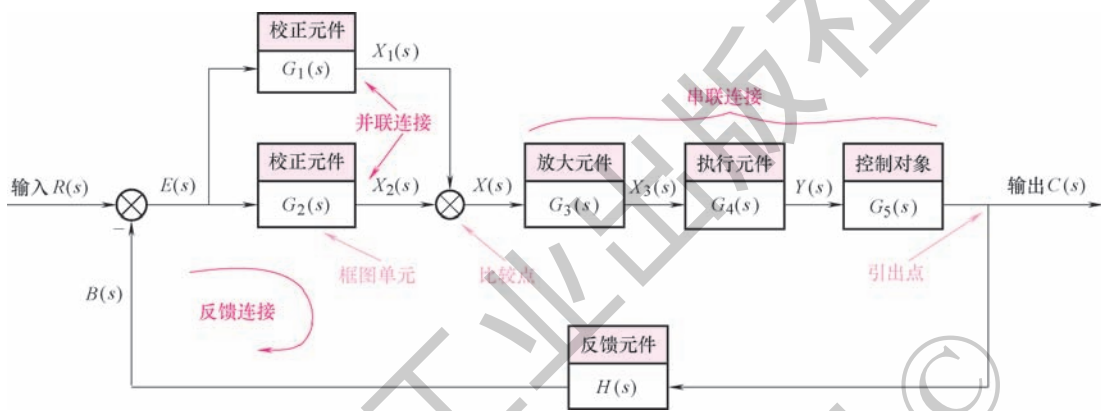


图 2-17 闭环控制系统的框图

1. 框图的构成要素

(1) 框图单元 框图单元是元件或环节传递函数的图解表示。指向框图单元的箭头表示输入，从框图单元出来的箭头表示输出，箭头上标明了相应的信号。其中 $G_1(s) \sim G_5(s)$ 和 $H(s)$ 表示相应输入输出之间环节的传递函数。

(2) 引出点 引出点表示信号引出和测量的位置。同一位置引出的几个信号，在大小和性质上完全一样。

(3) 比较点 比较点(或称汇合点、相加点)是两个或两个以上信号代数求和运算的图解表示。在比较点处，输出信号(离开比较点的信号)等于各输入信号(指向比较点的信号)的代数和。箭头上的“+”或“-”表示该输入信号在代数运算中的符号，在比较点处加减的信号必须是同种变量，运算时的量纲也要相同。本书中框图省略“+”，只在信号相减的地方保留“-”。

2. 系统连接方式及运算法则

系统各环节之间有三种基本连接方式：串联连接、并联连接和反馈连接。框图的运算法则是求取框图不同连接方式下等效传递函数的方法。

(1) 串联连接 各环节一个个顺序连接称为串联，即前一个环节的输出是后一个环节的输入。针对图 2-17 中的串联连接， $G_3(s)$ 、 $G_4(s)$ 、 $G_5(s)$ 为各个环节的传递函数，总的传递函数为

$$\frac{C(s)}{X(s)} = \frac{C(s)}{Y(s)} \frac{Y(s)}{X_3(s)} \frac{X_3(s)}{X(s)} = G_5(s) G_4(s) G_3(s) \quad (2-68)$$

因此，图 2-17 中串联连接的部分(见图 2-18a)可等效变换为图 2-18b。

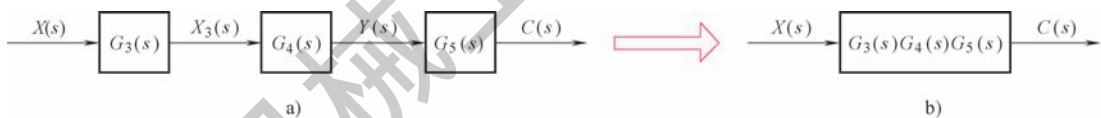


图 2-18 串联连接等效变换

式(2-68)说明,由环节串联所构成的系统,当无负载效应影响时,它的**总传递函数等于各环节传递函数的乘积**。当系统由 n 个环节 ($G_i(s) (i=1,2,\dots,n)$) 串联而成时,总传递函数为

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \cdots G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) \quad (2-69)$$

(2) **并联连接** 凡有几个环节的输入相同,输出进行代数求和运算的连接形式称为并联。针对图 2-17 中的并联连接,共同的输入为 $E(s)$,总输出为

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

所以总的传递函数为

$$\frac{X(s)}{E(s)} = \frac{X_1(s) + X_2(s)}{E(s)} = G_2(s) + G_1(s)$$

因此,图 2-17 中的并联连接部分(见图 2-19a)可等效变换为图 2-19b。

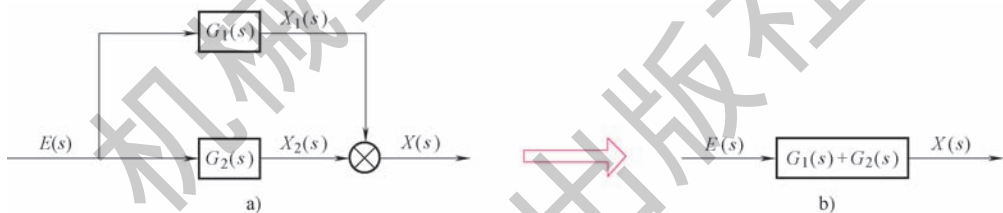


图 2-19 并联连接等效变换

这说明**环节并联所构成的总传递函数,等于各环节传递函数的代数和**。推广到 n 个环节 ($G_i(s) (i=1,2,\dots,n)$) 并联,其总的传递函数等于各并联环节传递函数的代数和,即

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \cdots + G_n(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s) \quad (2-70)$$

(3) **反馈连接** 所谓反馈,是将系统或某一环节的**输出,全部或部分地通过反馈回路回输到输入端,又重新输入到系统中去**。反馈与输入相加的称为“正反馈”,与输入相减的称为“负反馈”。由此可见,**反馈连接也是闭环系统传递函数框图的最基本形式**。

针对如图 2-17 所示的反馈连接,就其相应的传递函数进行分析与说明。

令该回路从输入 $R(s)$ 到输出 $C(s)$ 信号传递路径的传递函数为 $G(s)$,由式(2-69)和式(2-70),可知

$$G(s) = [G_1(s) + G_2(s)] G_3(s) G_4(s) G_5(s) \quad (2-71)$$

式(2-71)称为**前向通道传递函数**(从输入至输出信号传递路径上所有传递函数的等效传递函数)。

因此,将图 2-17 简化为图 2-20a。

该回路的输出 $C(s)$ 通过反馈传递函数 $H(s)$ 变为反馈信号 $B(s)$,即

$$B(s) = C(s) H(s) \quad (2-72)$$

由式(2-72)得

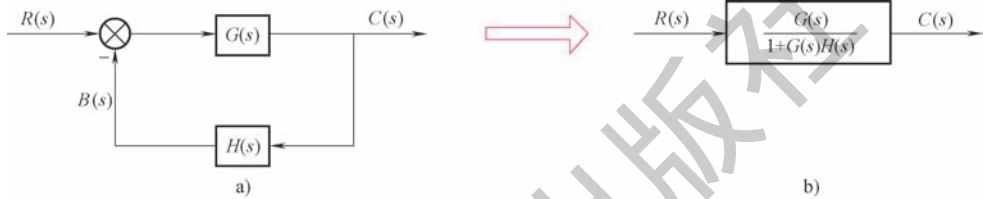


图 2-20 反馈连接等效变换

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} \quad (2-73)$$

式(2-73)称为**反馈通道传递函数**(反馈信号 $B(s)$ 与输出信号 $C(s)$ 之比)。

对于反馈控制回路, 反馈 $B(s)$ 与输入信号 $R(s)$ 进行比较后得到偏差信号 $E(s)$, 即

$$E(s) = R(s) - B(s) \quad (2-74)$$

将式(2-72)代入式(2-74), 得

$$E(s) = R(s) - C(s)H(s) \quad (2-75)$$

$$C(s) = E(s)G(s) \quad (2-76)$$

由式(2-75)和式(2-76)消去 $C(s)$ 得

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \quad (2-77)$$

式(2-77)称为**误差传递函数**(偏差信号与输入信号之比)。

由式(2-75)和式(2-76)消去 $E(s)$ 得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \quad (2-78)$$

式(2-78)称为**闭环传递函数**(输出信号与输入信号之比)。因此, 图 2-17 可等效变换为图 2-20b。

若反馈与输入为正反馈连接, 则通过分析可得闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)} \quad (2-79)$$

所以, 单回路系统的闭环传递函数可表示为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\text{前向通道传递函数}}{1 - \text{回路传递函数}} \quad (2-80)$$

所谓**回路(或称回环)**, 是指信号沿框图中箭头方向、从某点出发再返回该点(即起点和终点在同一点)且通过任一点的次数不多于 1 次时所构成的闭合通路。

单回路系统闭环传递函数分母因子式中含有 $G(s)H(s)$, 即

$$G(s)H(s) = \frac{B(s)}{E(s)} \quad (2-81)$$

式(2-81)称为**开环传递函数**(反馈信号与偏差信号之比)。开环传递函数很常用,它与开环控制系统的传递函数不是一个含义。后续各章通常用 $G(s)H(s)$ 表示开环传递函数,且均涉及用开环传递函数来研究闭环控制系统。

2.4.2 框图等效变换

在对系统进行分析时,常常需要对框图做一定的等效变换,特别是存在多回路和多输入的情况下,更需要对框图进行简化,以便求出总的传递函数,这有利于分析各输入信号对系统性能的影响。**在用等效变换对框图进行简化时,应遵守的基本原则**是变换前和变换后某一封闭域内输入输出的数学关系不变,即变换前与变换后前向通道中传递函数的乘积必须保持不变;对于反馈控制系统框图,变换前与变换后回路中传递函数的乘积必须保持不变。框图等效变换的基本原则图解如图2-21所示,封闭域的输入为 A ,输出为 B 、 C ,变换前和变换后始终满足 $B=AG_1G_2$ 、 $C=AG_1$ 。为简便起见,后文将省略传递函数中的“(s)”,例如, $G(s)$ 简写为 G 。

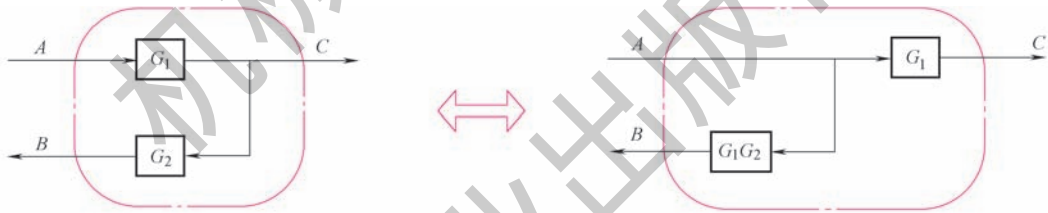


图 2-21 框图等效变换的基本原则图解

表 2-3 列出了框图等效变换法则。

表 2-3 框图等效变换法则

类 型		等 效 变 换
框图单元 连接方式	串联	
	并联	
	反馈	

(续)

类型		等效变换
同一类型相邻 (可互换位置)	框图单元	
	引出点	
	比较点	
不同类型相邻	框图单元与引出点	
	框图单元与比较点	
	引出点与比较点	

例 2-16 图 2-22a 为某系统的框图，试求出系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ ，其中， $G_1 \sim G_7$ 为信号在传递和变换过程中的相应传递函数。

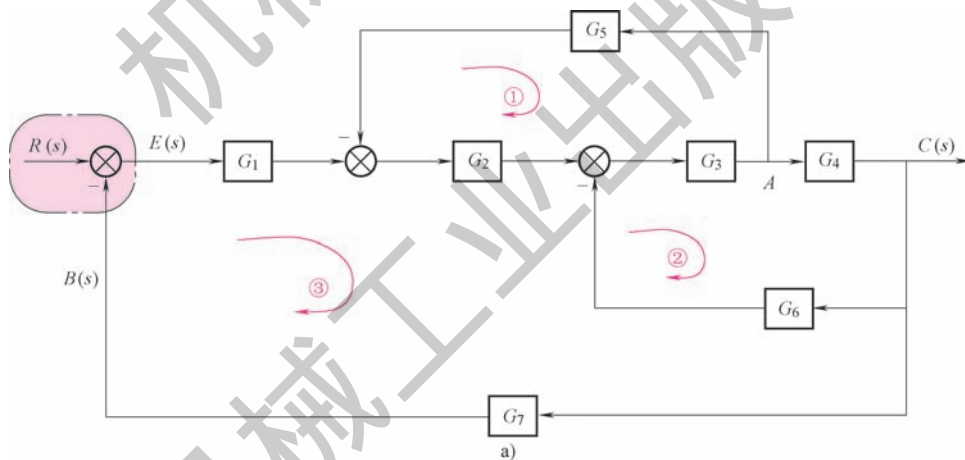


图 2-22 框图简化实例

解 根据表 2-3 所示的框图等效变换法则，本例题可采用框图单元与引出点互换位置的等效变换方法，如将引出点 A 右移到框图单元 G_4 之后；也可采用框图单元与比较点互换位置的等效变换方法，如将第二个比较点右移到 G_2 之后。其中，前者变换过程简单，本例题即采用这种方法。

将引出点 A 右移到框图单元 G_4 之后，得图 2-22b。

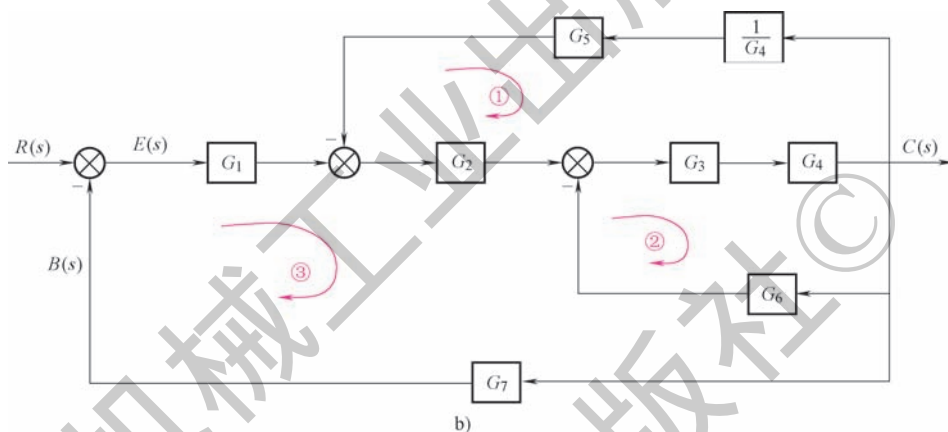


图 2-22 框图简化实例(续 1)

消去回路②，得图 2-22c。

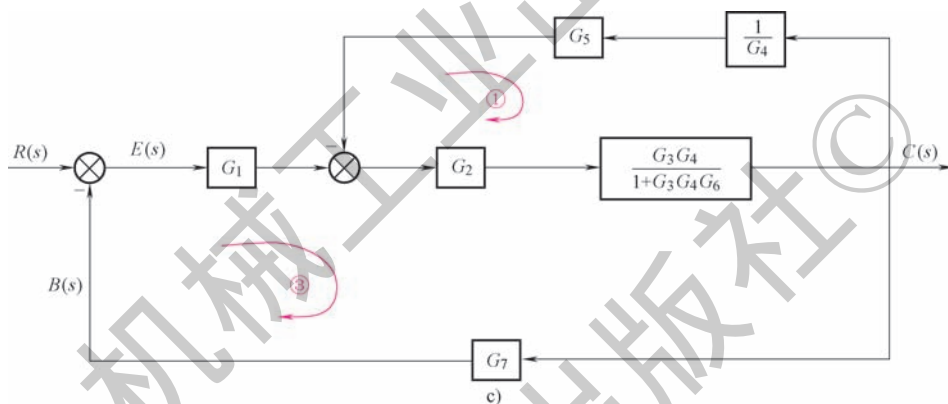


图 2-22 框图简化实例(续 2)

消去回路①，得图 2-22d。

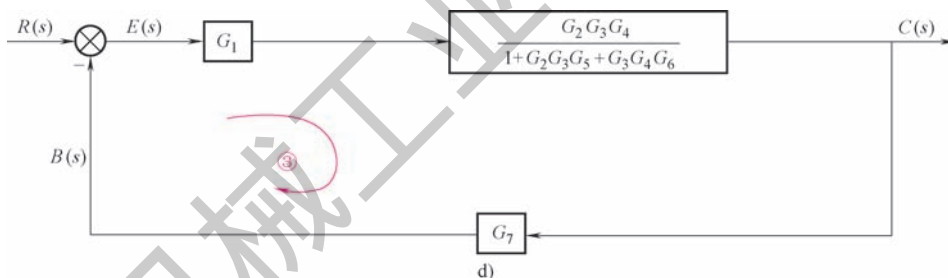


图 2-22 框图简化实例(续 3)

最后消去回路③，得图 2-22e。

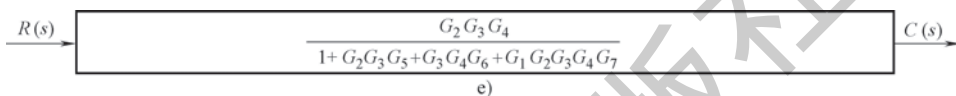


图 2-22 框图简化实例(续 4)

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7} \quad (2-82)$$

分析式(2-82)可以发现：①分子传递函数为 $G_1 G_2 G_3 G_4$ ；②分母为 $1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$ ，含数字 1 和传递函数 $G_2 G_3 G_5$ 、 $G_3 G_4 G_6$ 及 $G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$ 。再与图 2-22a 进行对比分析，是否有规律可循？这种规律涉及下面的梅逊公式。

2.4.3 梅逊公式

利用等效变换进行框图简化的方法，其求解思路较简单清晰，但求解过程较繁琐，涉及较多的等效变换绘图与运算。通过对例 2-16 框图等效变换的结果进行分析，似有快捷求解框图简化结果的方法，这就是产生于按克莱姆法则求解线性方程组的巧妙方法——梅逊(Mason)公式。下面介绍利用梅逊公式进行框图简化的方法。

1. 梅逊公式

从框图任一输入到框图任一点的传递函数，可用如下梅逊公式求解

$$T(s) = \frac{\sum_{k=1}^N P_k D_k}{D(s)} = \frac{\sum_{k=1}^N P_k D_k}{1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots + (-1)^M \sum L_M} \quad (2-83)$$

式中， $T(s)$ 为从框图任一输入至框图任一点的传递函数，输入可以是给定输入 $R(s)$ ，也可以是其他输入(如外部扰动输入)，例如对于图 2-22a 所示框图， $T(s)$ 可以是 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 、

$\frac{E(s)}{R(s)}$ 或 $\frac{B(s)}{R(s)}$ ； $D(s)$ 为框图的特征式， $D(s) = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots + (-1)^M \sum L_M$ ，同一

个框图，从框图任一输入到框图任一点的传递函数，其特征式相同，例如对于图 2-22a 所示框图， $\frac{C(s)}{R(s)}$ 、 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 、 $\frac{B(s)}{R(s)}$ 的特征式是相同的； $\sum L_1$ 为所有回路的传递函数之和； $\sum L_2$

为任何两个互不接触的回路传递函数乘积之和； $\sum L_3$ 为任何三个互不接触的回路传递函数乘积之和； $\sum L_M$ 为任何 M 个互不接触的回路传递函数乘积之和； P_k 为第 k 条前向通道传递函数； D_k 为与 P_k 对应的特征式 $D(s)$ 的余因子，即框图的特征式 $D(s)$ 中，与 P_k 接触的回路传递函数取零值，余下的 $D(s)$ 即为 D_k 。

2. 用梅逊公式进行框图简化

特征式 $D(s)$ 的求解与 P_k 、 D_k 无关，余因子 D_k 的求解与 $D(s)$ 、 P_k 有关，且 P_k 和 D_k 成对出现，因此，梅逊公式的求解顺序为先求 $D(s)$ ，再求 P_k 和 D_k 。下面结合例题说明如

何用梅逊公式进行框图简化。

例 2-17 图 2-23 所示为某系统的框图，试求出系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

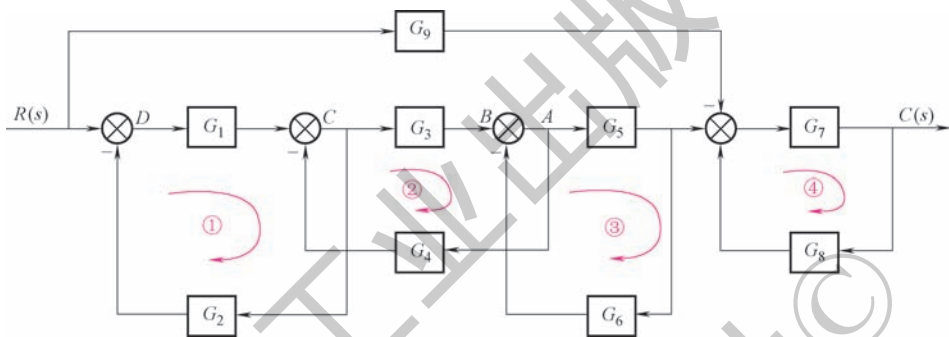


图 2-23 系统的框图

解 采用梅逊公式求解。

1) 先求 $D(s)$ 。框图有 4 个回路：①~④。注意回路的含义，例如，信号从引出点 A 出发，路径为 $A \rightarrow G_5 \rightarrow G_6 \rightarrow$ 比较点 $B \rightarrow A \rightarrow G_4 \rightarrow$ 比较点 $C \rightarrow G_3 \rightarrow B$ ，该通路不是回路，回路的起点和终点应在同一点(起点 A、终点 B 不是同一点)，且通过任一点的次数不多于 1 次(引出点 A 的通过次数为 1.5 次)。

4 个回路传递函数分别为 $-G_1G_2$ [路径为 $G_1 \rightarrow$ 比较点 $C \rightarrow G_2 \rightarrow$ 比较点 $D \rightarrow G_1$ ，该路径上传递函数乘积为 $G_1 \times G_2 \times (-1) = -G_1G_2$]、 $-G_3G_4$ 、 $-G_5G_6$ 、 G_7G_8 。对所有回路的传递函数求和，得到 ΣL_1

$$\Sigma L_1 = -G_1G_2 - G_3G_4 - G_5G_6 + G_7G_8$$

两个互不接触的回路有 4 种组合：①③、①④、②④、③④，传递函数乘积分别为 $G_1G_2G_5G_6$ 、 $-G_1G_2G_7G_8$ 、 $-G_3G_4G_7G_8$ 、 $-G_5G_6G_7G_8$ ，再求和得到 ΣL_2

$$\Sigma L_2 = G_1G_2G_5G_6 - G_1G_2G_7G_8 - G_3G_4G_7G_8 - G_5G_6G_7G_8$$

三个互不接触的回路只有 1 种组合：①③④，传递函数乘积为 $G_1G_2G_5G_6G_7G_8$ ，得

$$\Sigma L_3 = G_1G_2G_5G_6G_7G_8$$

由此可求得框图特征式为

$$D(s) = 1 - \Sigma L_1 + \Sigma L_2 - \Sigma L_3 = 1 - (-G_1G_2 - G_3G_4 - G_5G_6 + G_7G_8) + (G_1G_2G_5G_6 - G_1G_2G_7G_8 - G_3G_4G_7G_8 - G_5G_6G_7G_8) - G_1G_2G_5G_6G_7G_8$$

2) 再求 P_k 、 D_k 。从 $R(s)$ 到 $C(s)$ 有 2 条前向通道。

一条为 $P_1 = G_1G_3G_5G_7$ ，它与所有的回路均有接触，因此， $D(s)$ 中与 P_1 有接触的路径传递函数(即下式中用下划线标记的部分)均取零值，即

$$\underline{1} - (\underline{G_1G_2} - \underline{G_3G_4} - \underline{G_5G_6} + \underline{G_7G_8}) + (\underline{G_1G_2G_5G_6} - \underline{G_1G_2G_7G_8} - \underline{G_3G_4G_7G_8} - \underline{G_5G_6G_7G_8}) - \underline{G_1G_2G_5G_6G_7G_8}$$

此时， $D(s)$ 的余因子(即上式方框标记的部分)为 1，所以

$$P_1 = G_1 G_3 G_5 G_7, \quad D_1 = 1$$

另一条为 $P_2 = -G_9 G_7$ ，它与回路 $-G_1 G_2$ 、 $-G_3 G_4$ 、 $-G_5 G_6$ 不接触、与回路 $G_7 G_8$ 有接触， $D(s)$ 中与 P_2 有接触的回路传递函数 $G_7 G_8$ (即下式中用下划线标记的部分) 均取零值，即

$$1 - \left(\underbrace{-G_1 G_2 - G_3 G_4 - G_5 G_6}_{\text{框内}} + \underline{G_7 G_8} \right) + \left(\underbrace{G_1 G_2 G_5 G_6}_{\text{框内}} - \underline{G_1 G_2 G_7 G_8} - \right. \\ \left. G_3 G_4 \underline{G_7 G_8} - G_5 G_6 \underline{G_7 G_8} \right) - G_1 G_2 G_5 G_6 \underline{G_7 G_8}$$

此时， $D(s)$ 的余因子 (即上式方框标记的部分) 为 $1 - (-G_1 G_2 - G_3 G_4 - G_5 G_6) + (G_1 G_2 G_5 G_6)$ ，所以

$$P_2 = -G_9 G_7, \quad D_2 = 1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_5 G_6 + G_1 G_2 G_5 G_6$$

将以上结果代入式(2-83)，可得从 $R(s)$ 到 $C(s)$ 的传递函数 $T(s)$ ，即

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 D_1 + P_2 D_2}{D(s)} =$$

$$\frac{G_1 G_3 G_5 G_7 - G_9 G_7 (1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_5 G_6 + G_1 G_2 G_5 G_6)}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 + G_5 G_6 - G_7 G_8 + G_1 G_2 G_5 G_6 - G_1 G_2 G_7 G_8 - G_3 G_4 G_7 G_8 - G_5 G_6 G_7 G_8 - G_1 G_2 G_5 G_6 G_7 G_8}$$

对于本例这种较为复杂的框图，用等效变换方法的绘图和计算量巨大，梅逊公式却可以通过看图分析并结合必要的记录式书写与简单运算，予以解决。在使用梅逊公式时，注意不要遗漏回路、前向通道，不要弄错余因子。

例 2-18 图 2-22a 所示的系统框图，试求出系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 、误差传递函数 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 、

开环传递函数 $\frac{B(s)}{E(s)}$ 。

解 采用梅逊公式进行求解。

(1) 求系统传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 对于本例这种较为简单、弱交叉耦合的系统框图，用梅逊公式一下就能写出结果，但仍要列出如下主要步骤：

框图有三个回路，即

$$\sum L_1 = -G_2 G_3 G_5 - G_3 G_4 G_6 - G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$$

特征式为

$$D(s) = 1 - \sum L_1 = 1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$$

可得

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4, \quad D_1 = 1$$

所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 D_1}{D(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$$

(2) 求误差传递函数 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 同一个框图，从框图任一输入到框图任一点的传递函数，其特征式相同，即

$$D(s) = 1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7$$

可得

$$P_1 = 1, \quad D_1 = 1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6$$

所以

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{P_1 D_1}{D(s)} = \frac{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$$

这与如下求解方法的结果相同, 即

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s) G_7}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} G_7 = \frac{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$$

(3) 求开环传递函数 $\frac{B(s)}{E(s)}$ $E(s)$ 不是系统框图的输入, 因而, $\frac{B(s)}{E(s)}$ 的特征式不同于

$\frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 的特征式。系统框图隐去 $R(s)$ 及相邻的比较点(带阴影虚框内的部分)的剩余

框图, 正满足 $E(s)$ 为输入、 $B(s)$ 为输出, 其特征式为

$$D(s) = 1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6$$

可得

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_7, \quad D_1 = 1$$

所以

$$\frac{B(s)}{E(s)} = \frac{P_1 D_1}{D(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6}$$

也可以使用两次梅逊公式求出 $\frac{B(s)}{R(s)}$ 、 $\frac{E(s)}{R(s)}$, 再消去 $R(s)$ 后求得 $\frac{B(s)}{E(s)}$ 。

3. 框图简化方法总结

综合对比等效变换和梅逊公式, 可见:

1) 框图简化时, 除非特殊要求, 两种方法采用哪一种都是可以的, 但梅逊公式无需等效变换的多次绘图, 计算量小、求解快捷, 因此, 可优先考虑采用梅逊公式。

2) 即使采用不如梅逊公式简便的等效变换方法, 也可在等效变换时结合梅逊公式以减少计算量, 如可以直观地看出图 2-22b 回路②的简化结果为 $\frac{G_3 G_4}{1 + G_3 G_4 G_6}$, 根据图 2-22a 可

以看出图 2-22c 回路①的简化结果为 $\frac{G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6}$ 、图 2-22d 回路③的简化结果为

$$\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_5 + G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}$$

3) 对于系统框图的特征式 $D(s)$, 如果令 $D(s) = 0$, 则可得到系统的特征方程 $D(s) = 0$ (将在下一章用到)。由框图得到系统的特征方程不必解出系统的传递函数, 只需用公式 $D(s) = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots + (-1)^M \sum L_M$, 即可求出 $D(s)$; 若已知开环传递函数 $G(s)H(s)$, 则 $1 + G(s)H(s) = 0$ 即为特征方程。

4) 注意系统框图简化的结果与书写: ①传递函数分母必有数字“1”, 这可由系统的特

征式 $D(s)$ 得知; ②传递函数通常只有一次项(形如 $G_1 G_2$ 、 $G_1 G_2 G_3$), 而没有二次项及以上(形如 $G_1^2 G_2$ 、 $G_1 G_2^3$ 、 $G_1 G_2 G_3^5$ 、 $G_1 G_2^3 G_3^2$), 这是因为回路通过任一点的次数不多于 1 次; ③传递函数分母多项式通常写成因子式之和(如 $G_1 G_3 G_4 + G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5 G_6 + G_2 G_5 G_6$) 不宜写成因子式之积(如 $(G_1 + G_2)(G_3 G_4 + G_5 G_6)$); ④每个回路宜按前向通道、反馈通道顺序书写。前两个问题, 遗漏数字“1”、传递函数出现二次项及以上, 简化结果肯定错误; 后两个问题, 便于结合梅逊公式对简化结果进行校验。

本章小结

本章主要介绍了控制系统微分方程的求解和简化、微分方程转化为代数方程的数学工具——拉普拉斯变换、传递函数的求解及框图简化等知识。研究或分析控制系统, 需先建立系统的数学模型。数学模型是描述控制系统在信号传递过程中物理特性的数学表示。

1) 将实际物理系统近似或等效为理想化的物理模型, 物理模型的数学描述即是数学模型。只有经过仔细的分析研究, 抓住本质的主要因素, 忽略次要因素, 才能建立起既便于研究又能基本反映实际物理过程的数学模型。物理系统能用机理分析方法建立数学模型, 也能通过实验辨识方法建模。

2) 微分方程是根据系统动力学特性描述系统的直观数学手段, 是控制工程中常用的数学模型。机械系统、电气系统和液压系统的微分方程是机、电、液多学科控制工程的基础。相似系统为研究不同类型的工程系统提供了另外一种途径。

3) 拉普拉斯变换是将微分方程代数化的数学工具, 通过拉普拉斯变换可以将复杂的微积分运算转化为简单的代数运算, 再通过拉普拉斯反变换即可求得系统的输出(即微分方程的解), 因而使控制系统数学模型的求解和处理变得更加简单。

4) 在经典控制理论中, 线性定常系统采用传递函数描述其输入与输出关系。在零初始条件下对系统微分方程做拉普拉斯变换, 即可求得系统的传递函数。它说明系统本身特性与输入输出之间是没有关系的。传递函数不能表征所描述系统的物理构成, 不同的物理系统, 只要它们动态特性相同, 可用同一传递函数来描述。

5) 根据运动规律和数学模型的特点, 将比较复杂的系统划分为几种基本环节的组合格, 有利于研究复杂系统。第 4 章控制系统的频域分析就主要采用了这种方法(将复杂系统拆解为基本环节)来研究复杂系统。

6) 框图是研究控制系统的图解方法。等效变换和梅逊公式是框图简化的两种常用方法。已知系统框图, 可直接等效变换进行简化, 也可以直接采用梅逊公式(而无需把框图转换为其他形式)进行简化。采用等效变换和梅逊公式可求出系统框图中任意两个变量之间的关系。

习题

2-1 思考以下问题。

1) 什么是数学模型? 动力学系统的数学模型主要包括哪些种类?

2) 相似系统的数学模型是否相同? 相似系统的特点是什么?

3) 传递函数的概念。传递函数能否反映具有非零初始条件的系统动态过程? 能否反映系统的物理属性?

4) 系统阶次和 n 阶系统的概念。

5) 框图简化有哪些方法?

2-2 求下列函数的拉普拉斯变换, 假定当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$ 。

1) $f(t) = 5(1 - \cos 3t)$

2) $f(t) = (1 + t + t^2)e^{-t}$

3) $f(t) = e^{-0.5t} \sin 10t$

4) $f(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$

2-3 求下列函数的拉普拉斯反变换。

1) $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

2) $F(s) = \frac{1}{s^2(Ts+1)} \quad (T > 0)$

3) $F(s) = \frac{s}{(s+1)^2(s+2)}$

4) $F(s) = \frac{s+1}{s^2+9}$

5) $C(s) = \frac{4}{s(s^2+2s+4)}$

6) $F(s) = \frac{s}{s^2-2s+5}$

2-4 已知象函数如下, 求原函数 $f(t)$ 的终值。

1) $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

2) $F(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^3(s+2)}$

2-5 某系统微分方程为 $3\dot{c}(t) + 2c(t) = 2\dot{r}(t) + 3r(t)$, 已知 $c(0) = r(0) = 0$, 其极点和零点各是多少? 当输入为单位阶跃信号时, 即 $r(t) = 1(t)$, 输出 $c(t)$ 的初值和终值各为多少?

2-6 传递函数 $G(s) = \frac{10(s+1)(s^2+2s+2)e^{-2s}}{s^2(2s+1)(4s^2+12s+9)}$ 由哪些基本环节组成?

2-7 求图 2-24 所示无源网络传递函数 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ 。

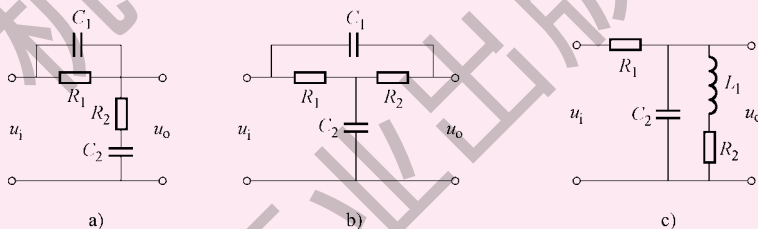


图 2-24 题 2-7 图

2-8 求图 2-25 所示有源网络传递函数 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ 。

2-9 图 2-26 所示为汽车在凹凸不平路面上行驶时承载系统的简化力学模型, 路面的高低变化形成激励源, 由此造成汽车的振动和轮胎受力。求: $x_i(t)$ 为输入, 分别以

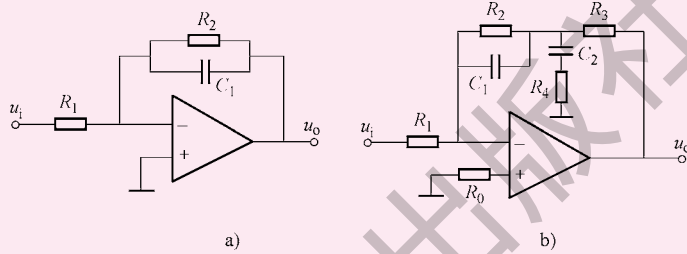


图 2-25 题 2-8 图

汽车质量垂直位移 $x_0(t)$ 和轮胎垂直受力 $F_2(t)$ 作为输出的传递函数。

2-10 冷轧轧机通常由 4~6 个机架组成，带材从第一机架连续被轧至最后一架。实际轧机机座及辊系系统是一个复杂的多自由度质量分布系统。为了便于分析，可将其简化为一个三自由度质量-弹簧-阻尼系统，如图 2-27 所示。其中， m_0 、 m_1 、 m_2 分别为机架上部(包括上部立柱、横梁、液压活塞等)、上支撑辊和上工作辊、整个机架下辊系(包括下工作辊、下支撑辊、下部立柱、横梁等)等效质量； x_0 、 x_1 、 x_2 分别为机架上部、上支撑辊和上工作辊、整个机架下辊系质心位移； f_0 、 f_1 分别为整个机架上辊系、机架下辊系等效阻尼； k_0 、 k_1 分别为整个机架上辊系、机架下辊系等效刚度。设轧制力为 F_w ，求：以压力 p_L 为输入，分别以 x_0 、 x_1 、 x_2 为输出的动力学模型。

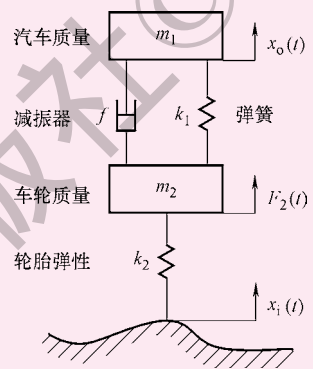


图 2-26 题 2-9 图

2-11 求图 2-28 所示机械系统的传递函数。

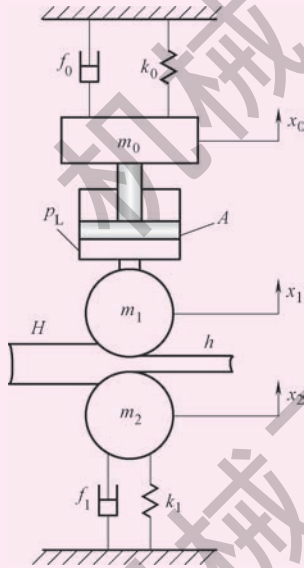


图 2-27 题 2-10 图

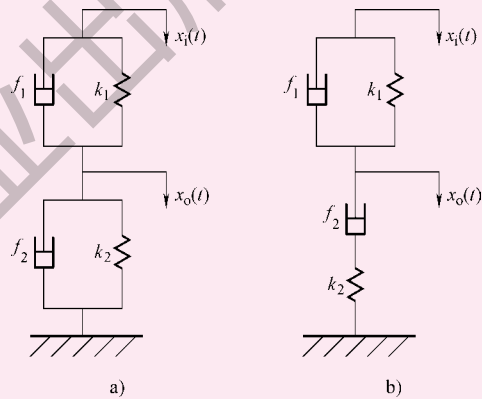
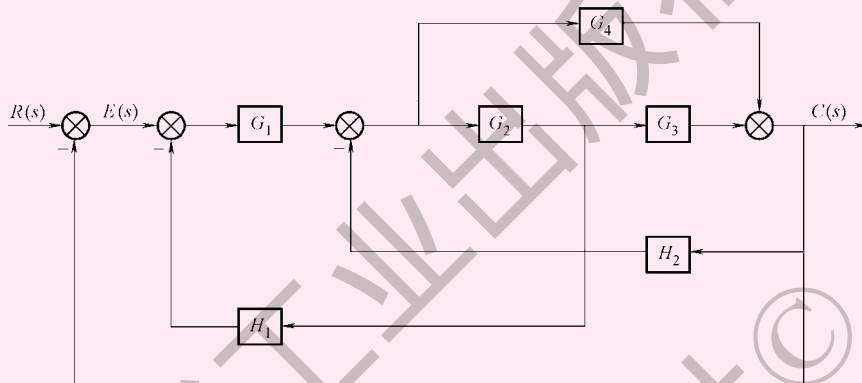
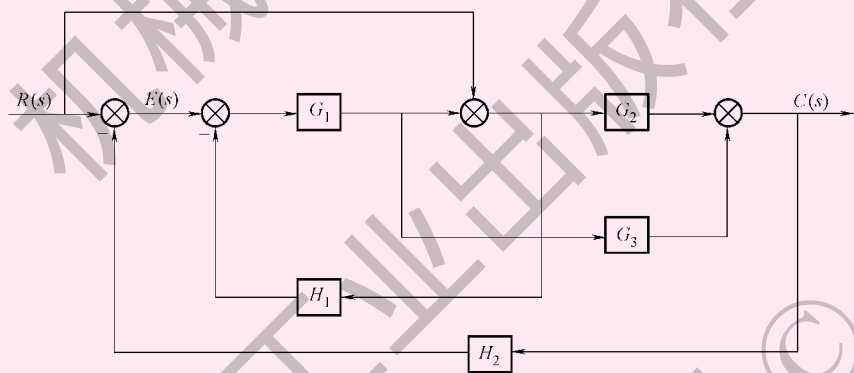


图 2-28 题 2-11 图

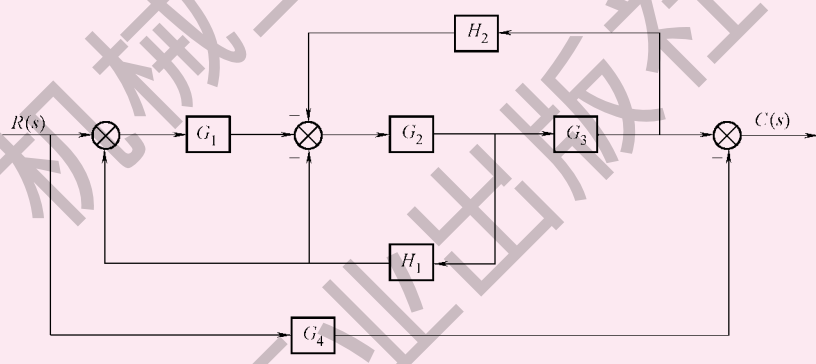
2-12 求图 2-29 所示各系统框图的传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。



a)

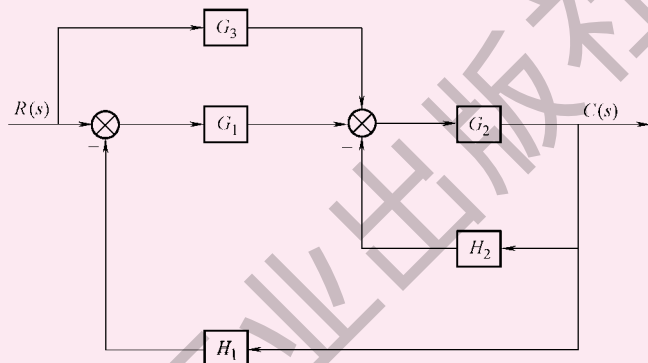


b)

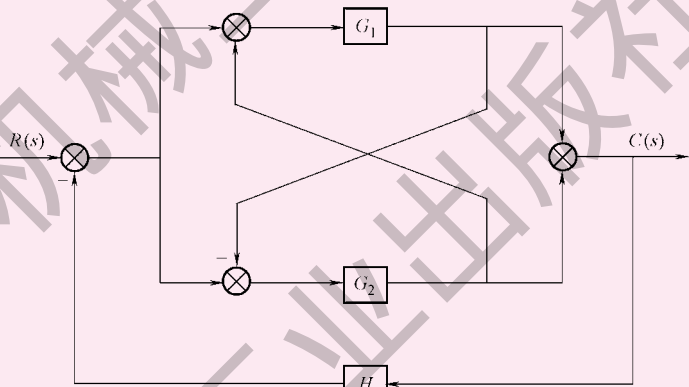


c)

图 2-29 题 2-12 图



d)



e)

图 2-29 题 2-12 图(续)

2-13 求图 2-29a 和图 2-29b 所示系统框图的误差传递函数 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 。

第3章

控制系统的时域分析

系统的数学模型确定之后，便可以用几种不同的方法去分析控制系统的性能指标。在经典控制理论中，有时域性能指标和频域性能指标(两者之间的关系见5.1.2节)。时域性能指标的分析方法有时域分析法和根轨迹法，频域性能指标的分析方法则是频域分析法。显然，不同的方法有不同的特点和不同的适用性。控制系统的实际运行都是在时域内进行的。给定系统输入时间信号 $r(t)$ ，可求出系统的输出响应 $c(t)$ 。由于系统的输出响应 $c(t)$ 是时间 t 的函数，故称这种响应为时间响应(Time Response)。时域分析通过研究系统在给定输入信号作用下的时间响应来分析评价系统的性能。稳定的控制系统的时域性能指标包括瞬态性能指标和稳态性能指标。时域分析法所给出的性能指标直观而明确，能够提供系统时间响应的全部信息，还可以应用于多输入、多输出以及非线性系统。控制系统的稳定性是由系统特征方程的根(即闭环极点)决定的，时间响应中瞬态分量的特性也是由闭环极点决定的，根轨迹法是一种实用的高阶系统求取闭环极点的图解方法，与时间响应分析形成互补。本章的主要内容有系统的时间响应分析、稳定性分析、稳态误差分析计算和根轨迹法。

3.1 控制系统的时间响应及性能指标

3.1.1 典型输入信号

控制系统的性能可以通过在输入信号作用下，用系统的时间响应来评价。系统的时间响应不仅取决于系统本身的特性，还与外加输入信号有关。由于控制系统的实际输入信号往往无法预先知道，因此，在分析和设计控制系统时，总是预先规定一些典型的输入信号，并以此对各种系统的性能进行分析比较。典型信号应具有典型性，即能够反映系统工作的大部分实际情况；同时形式应尽可能简单，便于分析处理。

1. 阶跃信号

阶跃(Step)信号如图 3-1a 所示, 其函数表达式为

$$r(t) = \begin{cases} A & (t \geq 0, A = \text{常量}) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

拉普拉斯变换为

$$R(s) = L[r(t)] = \frac{A}{s}$$

阶跃信号相当于一个数值为常值的信号, 在 $t \geq 0$ 时突然加到系统上。幅值 A 为 1 的阶跃函数称为单位阶跃函数, 记作 $1(t)$ 。

2. 斜坡信号

斜坡(Ramp)信号(或称速度信号)如图 3-1b 所示, 其函数表达式为

$$r(t) = \begin{cases} At & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

拉普拉斯变换为

$$R(s) = L[At] = \frac{A}{s^2}$$

斜坡信号相当于在控制系统中加入一个恒速变化的信号, 其速度为 A 。当 $A=1$ 时, 称为单位斜坡函数。单位斜坡函数对时间的导数就是单位阶跃函数, 即 $\frac{d}{dt}t = 1(t)$; 反之,

单位阶跃函数的积分就是单位斜坡函数, 即 $\int_0^t 1(t) dt = t$ 。

3. 加速度信号

加速度信号如图 3-1c 所示, 其函数表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}At^2 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

拉普拉斯变换为

$$R(s) = L\left[\frac{1}{2}At^2\right] = \frac{A}{s^3}$$

加速度信号相当于在控制系统中加入一个按恒加速度变化的信号, 加速度为 A 。当 $A=1$ 时, 称为单位加速度函数。单位加速度函数对时间的导数即为单位斜坡函数, 单位斜坡函数的积分就是单位加速度函数。

4. 脉冲信号

实用脉冲信号可视为持续时间极短的信号, 如图 3-1d 所示, 其函数表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{A}{\varepsilon} & (0 \leq t \leq \varepsilon) \\ 0 & (t < 0, t > \varepsilon) \end{cases}$$

式中, ε 为脉冲宽度, A 为脉冲面积。

当 $A=1$ 时, 记为 $\delta_\varepsilon(t)$ 。若令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即对脉冲的宽度取趋于零的极限, 则为理想单位脉冲, 称作单位脉冲信号, 记为 $\delta(t)$ (见图 3-1e), 即 $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$, 有

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} \infty & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

显然, $\delta(t)$ 所描述的脉冲信号实际上是无法获得的。在工程中, 当 ε 远小于被控对象的时间常数时, 这种单位窄脉冲信号常被近似地当作 $\delta(t)$ 来处理。 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} \right]_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} \left[1 - \left(1 - \varepsilon s + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 s^2 - \dots \right) \right] = 1$$

单位阶跃函数对时间的导数就是单位脉冲函数, 即 $\frac{d}{dt} 1(t) = \delta(t)$; 反之, 单位脉冲函数的积分就是单位阶跃函数。

5. 正弦信号

正弦信号如图 3-1f 所示, 其函数表达式为

$$r(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

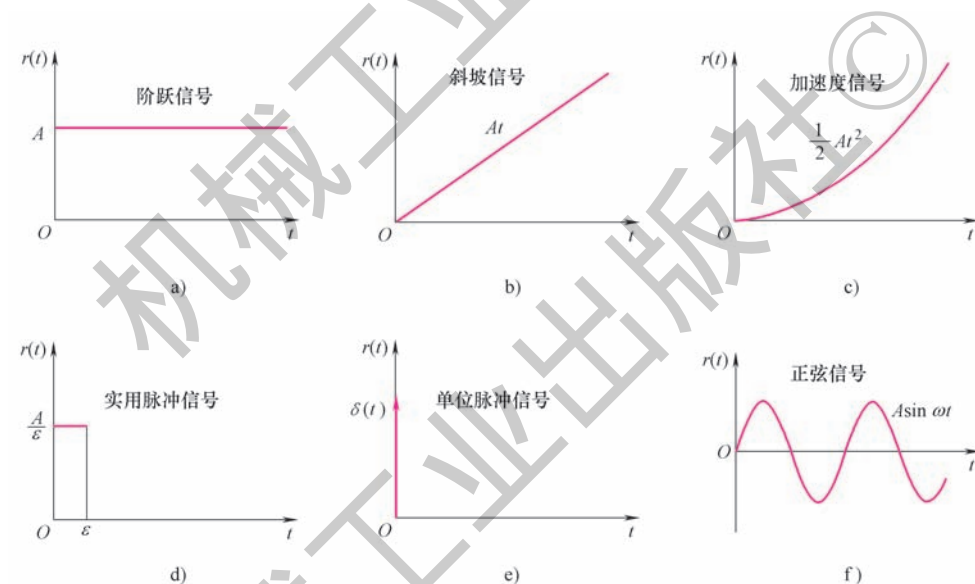


图 3-1 典型输入信号

当 $A=1$ 时, 称为单位正弦函数。单位正弦函数的拉普拉斯变换为

$$R(s) = L[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

正弦信号主要用于求取系统的频率响应, 据此分析(第4章)与综合(第5章)控制系统。

实际应用时采用哪一种典型信号, 取决于系统常见的工作状态; 同时, 在所有可能的输入信号中, 往往选取最不利的信号作为系统的典型信号。这种处理在许多场合是可行的。例如室温、水位等恒值调节系统, 以及工作状态突然改变或突然受到恒定输入作用的控制系统, 都可以采用阶跃信号作为典型输入信号; 跟踪通信卫星的天线控制系统, 以及输入信号随时间逐渐变化的控制系统, 斜坡信号是比较合适的典型输入; 加速度信号可用来作为航天控制系统的典型输入; 当控制系统的输入信号是瞬时冲击输入量时, 采用脉冲信号最为合适; 当系统的输入作用具有周期性变化时, 可选择正弦信号作为典型输入。

3.1.2 时间响应概述

时间响应(或称时域响应)即时域内系统的输出响应。

描述系统微分方程的解 $c(t)$ 就是该系统时间响应的数学表达式。描述线性定常系统的微分方程为常微分方程, 其一般描述形式为

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

该方程各项系数都是常数, 因而其解 $c(t)$ 必然存在并且唯一。从数学角度来讲, 其解 $c(t)$ 由该常微分方程对应的齐次微分方程 $a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = 0$ 的通解和由零初始条件确定的非齐次微分方程特解之和组成。

系统时间响应的数学表达式即为该系统输出 $C(s)$ 的拉普拉斯反变换 $c(t)$ 。由 2.2.2 节可知, 与高等数学中解常微分方程的方法相比, 由拉普拉斯反变换可以更简便地求解系统输出响应 $c(t)$ 。我们研究的是零初始条件下的输出响应(即零状态响应), 零初始条件下常微分方程对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

给定输入 $R(s)$, 则输出 $C(s)$ 为

$$C(s) = R(s) G(s) = R(s) \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3-1)$$

对式(3-1)分母进行因式分解, 部分分式展开, 再进行拉普拉斯反变换, 即可求出输出响应 $c(t)$ 。

常微分方程对应的齐次微分方程 $a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = 0$, 系统特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

由此可见, 系统特征方程既是齐次微分方程拉普拉斯变换所得的代数方程, 又是系统传递函数的分母(即特征式 $D(s)$) 等于零的方程, 即

$$D(s) = 0 \quad (3-2)$$

若已知反馈控制系统的框图, 其特征式 $D(s)$ 可用梅逊公式求得(见 2.4.3 节)。

若系统特征方程的根(系统特征根), 即系统极点 $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 两两互异, 有

$$D(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - s_i) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s - s_i} \quad (k_i \text{ 为系统极点 } s_i \text{ 处的留数}),$$

则式(3-1)中与特征式 $D(s)$ 对应的拉普拉斯反变换, 即齐次微分方程的通解 $c_1(t)$ 为

$$c_1(t) = L^{-1}[D(s)] = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad (3-3)$$

任一系统的时间响应 $c(t)$ 都是由瞬态分量 $c_1(t)$ 和稳态分量 $c_{ss}(t)$ 两部分组成的, $c_1(t)$ 、 $c_{ss}(t)$ 又分别称为瞬态响应(Transient Response)和稳态响应(Steady-State Response), 即

$$c(t) = c_1(t) + c_{ss}(t) \quad (3-4)$$

时间响应中, 与系统极点(系统特征根)对应的响应分量即为瞬态响应; 一般地, 与输入极点对应的响应分量为稳态响应。

1. 瞬态响应 $c_1(t)$

系统在某一输入信号的作用下, 系统的输出量从初始状态到最终状态的响应过程称为瞬态过程(或称暂态过程、动态过程或过渡过程)。

由于实际控制系统具有储、耗能元件(如在机械系统和电气网络中, m 、 k 、 L 、 C 为储能元件, f 、 R 为耗能元件)并存在能量形式的转换, 使得描述系统的数学方程不是代数方程而是微分方程(系统的阶次等于独立储能元件的数目), 因此, 系统输出量 $c(t)$ 不可能立即复现输入量 $r(t)$ 的变化, 这是瞬态过程产生的物理和数学机理。

根据系统结构和参量选择情况, 瞬态过程表现为衰减、发散、等幅振荡等形式。一个能够实际运行的控制系统, 必须是稳定的系统, 其瞬态过程必须是衰减(收敛)的(见 3.5 节), 因此, 一个稳定的控制系统, 其瞬态响应(或称暂态响应、动态响应)是时间响应中随着时间的推移会消失的部分。因而, 当时间 t 足够长或趋于无穷大时, 瞬态响应趋于零, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(t) = 0 \quad (3-5)$$

瞬态过程反映了系统的动态特性(稳定性、快速性以及阻尼状态与过渡过程)。

2. 稳态响应 $c_{ss}(t)$

一个稳定的控制系统, 其稳态响应是时间响应中将一直存在的部分。因而, 当时间 t 足够长或趋于无穷大时(此时瞬态响应趋于零), 系统的输出状态为稳态响应, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_{ss}(t) \quad (3-6)$$

稳态响应表征系统输出量 $c(t)$ 最终复现输入量 $r(t)$ 的程度。根据输入信号的选择情况, 稳态响应表现为恒值(如阶跃信号作用下的稳态响应为非零常数、脉冲信号作用下的

稳态响应总为零)、发散(如斜坡信号、加速度信号作用下的稳态响应)、振荡(如正弦信号作用下的稳态响应)等形式。

稳态响应反映了系统的稳态特性(准确性)。

3. 单位阶跃响应的两种形式

一个稳定的系统,其单位阶跃响应(即单位阶跃信号作用下的时间响应)通常表现为图 3-2 所示的无超调单调上升和有超调衰减振荡两种形式。超调即输出响应有超过调节期望值(即稳态值 $c(\infty)$)。

例如在测温时,温度作为阶跃输入,温度计为系统,温度测量值为系统的输出响应,测某一恒温(如体温)时温度测量值要经历单调上升过程,在足够长的时间之后逼近于该恒温值,其时间响应形如图 3-2a 所示。

又如,在车辆悬架系统中,地面高低变化作为系统输入,车身高低变化作为系统输出响应,车轮轧上更高的台肩路面后,车身高低变化要经历衰减振荡过程,在足够长的时间之后收敛于稳态值 $c(\infty)$,其时间响应形如图 3-2b 所示。

3.1.3 瞬态性能指标

控制系统的瞬态性能指标通常是指单位阶跃响应的瞬态性能指标。指标定义如下(见图 3-2)。

1. 延迟时间(Delay Time) t_d

响应第一次达到稳态值 $c(\infty)$ (即输出终值)一半所需的时间,叫作延迟时间,即

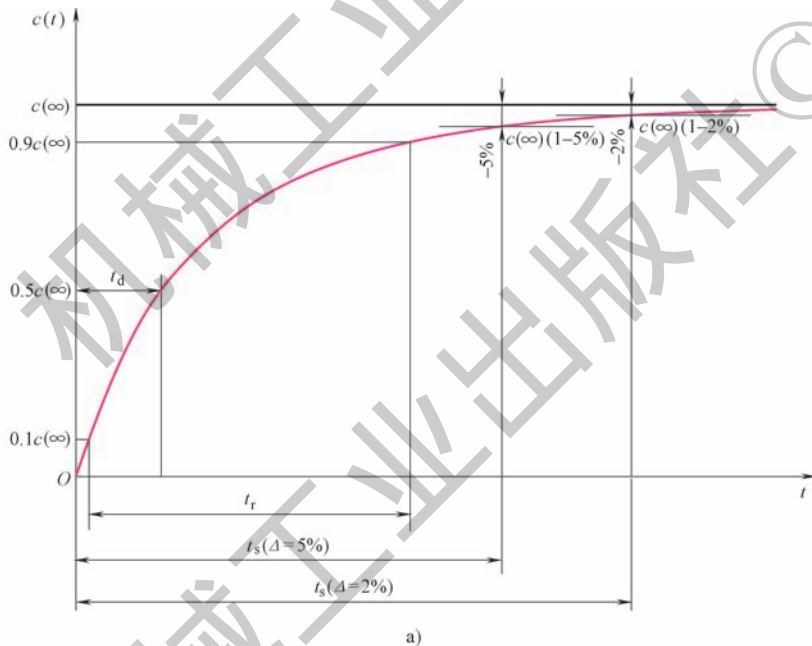


图 3-2 单位阶跃响应

a) 无超调单调上升($\zeta \geq 1$)

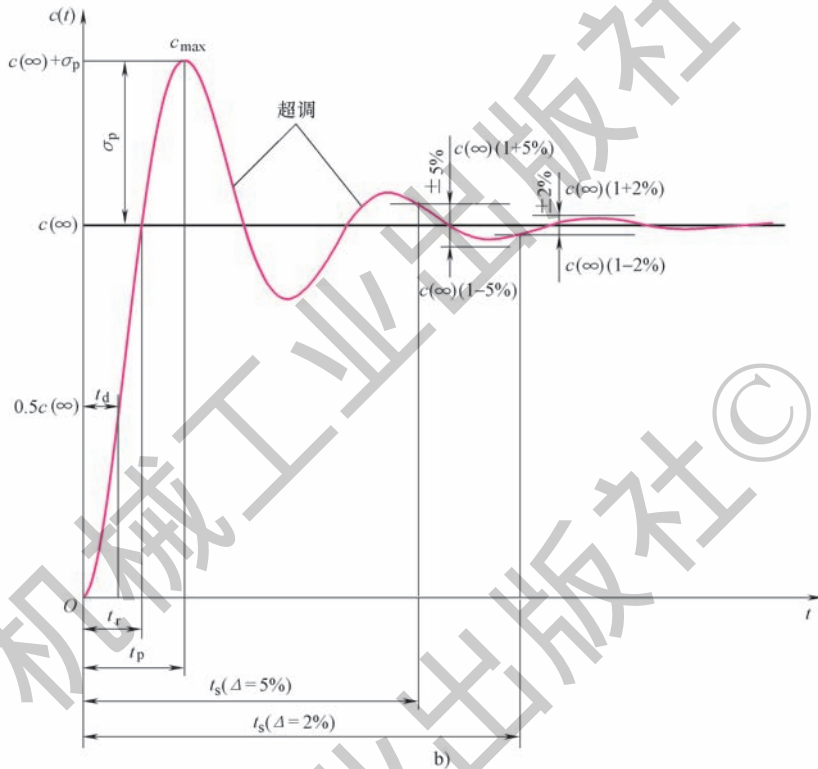


图 3-2 单位阶跃响应(续)

b) 有超调衰减振荡 ($0 < \zeta < 1$)

$$c(t_d) = 0.5c(\infty) \quad (3-7)$$

2. 上升时间 (Rise Time) t_r

对于过阻尼 ($\zeta > 1$) 和临界阻尼 ($\zeta = 1$) 系统, 其单位阶跃响应无超调, 通常采用从稳态值 $c(\infty)$ 的 10% 上升到 90% 所需的时间来定义上升时间, 即

$$\begin{cases} t_r = t_{0.9} - t_{0.1} \\ c(t_{0.9}) = 0.9c(\infty) \\ c(t_{0.1}) = 0.1c(\infty) \end{cases} \quad (3-8)$$

对于欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 系统, 其单位阶跃响应有超调, 通常采用响应第一次上升到稳态值 $c(\infty)$ 所需的时间来定义上升时间, 即

$$\begin{cases} c(t) = c(\infty) \\ t_r = \min t \end{cases} \quad (3-9)$$

3. 峰值时间 (Peak Time) t_p

响应达到超调的第一个峰值 (即输出最大值 c_{\max}) 所需要的时间叫作峰值时间, 即

$$c(t_p) = c_{\max} \quad (3-10)$$

4. 最大超调量 (Peak Overshoot) $\sigma_p \%$

第一个峰值 $c(t_p)$ 、稳态值 $c(\infty)$ 之差 (即超过稳态值 $c(\infty)$ 的最大偏离量 σ_p) 与稳态

值 $c(\infty)$ 比值的百分数叫作最大超调量 $\sigma_p\%$ ，即

$$\sigma_p\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3-11)$$

最大超调量反映了系统的阻尼大小和振荡程度，即反映了系统的稳定程度或相对稳定性。

5. 调整时间 (Settling Time) t_s

当时间足够长时，响应最终渐近收敛于稳态值 $c(\infty)$ ，输出响应 $c(t)$ 与稳态值 $c(\infty)$ 之间的误差达到容许范围 Δ (Δ 通常取 5% 或 2%) 所需的最短时间定义为调整时间 (或称调节时间)，即

$$\begin{cases} c(t) = c(\infty)(1 \pm \Delta) \\ t_s = \min t \end{cases} \quad (3-12)$$

对于过阻尼 ($\zeta > 1$) 和临界阻尼 ($\zeta = 1$) 系统，其单位阶跃响应无超调，式 (3-12) 仅适用 $c(t) = c(\infty)(1 - \Delta)$ 。

3.1.4 稳态性能指标

稳态性能指标表示系统稳态输出跟踪给定输入或抑制扰动输入的能力和精度，用系统跟踪典型输入信号的稳态误差来评价。稳态误差将在 3.6 节介绍。

3.2 一阶系统的时域分析

3.2.1 一阶系统的数学模型

液压缸是机械装备电液控制系统的重要执行元件。液压油具有可压缩性 (液压油的体积模量 β_0 通常选取 700 MPa 左右)，可视为弹性元件。若将活塞和活塞杆的运动摩擦简化为阻尼摩擦，并不计活塞和活塞杆质量，液压缸可抽象简化成图 3-3 所示的弹簧-阻尼系统，该系统独立储能元件的数目为 1，因而为一阶系统。该系统的输入为进油压力 $p(t)$ ，输出为活塞杆位移 $x(t)$ ，回油接油箱其压力近似为零，求得微分方程为

$$f\dot{x}(t) + kx(t) = Ap(t)$$

传递函数为

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{A}{fs+k} = \frac{\frac{A}{k}}{\frac{f}{k}s+1}$$

一阶系统传递函数的一般形式为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts+1} \quad (3-13)$$

式中, K 为系统增益; T 为时间常数, 具有时间量纲。

线性系统满足叠加原理, 系统增益 K 仅影响时间响应的幅值, 因而研究系统增益 $K=1$ 具有普遍意义, 此时一阶系统的传递函数写成如下标准形式

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+Ts} \quad (3-14)$$

一阶系统的典型形式是惯性环节, 对应的框图如图 3-4 所示。

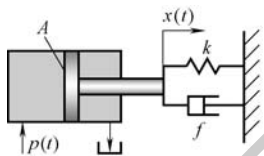


图 3-3 一阶系统

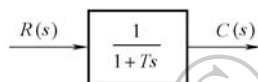


图 3-4 一阶系统框图

3.2.2 一阶系统的时间响应

一阶系统对于输入信号 $r(t)$ 的时间响应 $c(t)$, 可先利用式 (3-14) 求出 $C(s)$, 然后对 $C(s)$ 进行拉普拉斯反变换, 得到时间响应 $c(t)$ 。

1. 单位阶跃响应

对于单位阶跃输入 $r(t)=1(t)$, 则 $R(s)=\frac{1}{s}$, 得

$$C(s) = R(s) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s} \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s} + \frac{-T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

对 $C(s)$ 进行拉普拉斯反变换, 得到单位阶跃响应 $c(t)$ 为

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \quad (3-15)$$

由式 (3-4)、式 (3-5) 及相关定义可知, 瞬态响应 $c_1(t) = -e^{-\frac{t}{T}}$, 对应系统极点 $-\frac{1}{T}$; 稳态响应 $c_{ss}(t) = 1$, 对应输入极点 0。单位阶跃响应曲线如图 3-5a 所示。

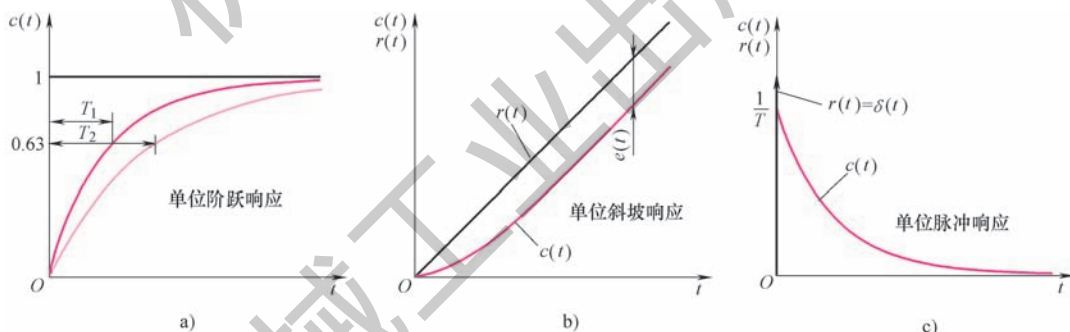


图 3-5 一阶系统的时间响应

单位阶跃响应无超调、无振荡，从零值到稳态值呈指数曲线单调上升。时间常数越小，上升越快。单位阶跃响应的稳态值 $c(\infty)$ 可由式(3-15)或利用拉普拉斯变换终值定理求得，即

$$c(\infty) = c(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 1 - e^{-\frac{1}{T}t} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 1$$

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{Ts+1} = 1$$

时间常数取决于系统参量而与输入无关。把 $t=T$ 代入单位阶跃响应式可得到 $c(T) = 0.63c(\infty)$ ，根据这一特点，可用实验方法测定时间常数 T 。

当阶跃输入 $\frac{A}{s}$ 的幅值 $A \neq 1$ 时，则一阶系统 $\frac{1}{Ts+1}$ 的阶跃响应为

$$c(t) = A(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \quad (t \geq 0)$$

当系统增益 $K \neq 1$ 时，则一阶系统 $\frac{K}{Ts+1}$ 的单位阶跃响应为

$$c(t) = K(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \quad (t \geq 0)$$

显然，系统增益 K 或输入幅值 A 仅使时间响应的幅值成比例地变化，而不影响瞬态性能。

2. 单位斜坡响应

对于单位斜坡输入 $r(t) = t$ ，则 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ，得

$$C(s) = R(s) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2} \frac{1}{Ts+1} = \frac{1-Ts}{s^2} + \frac{T^2}{Ts+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}$$

对 $C(s)$ 进行拉普拉斯反变换，得到单位斜坡响应 $c(t)$ 为

$$c(t) = t - T + Te^{-\frac{1}{T}t} \quad (t \geq 0) \quad (3-16)$$

由式(3-4)、式(3-5)及相关定义可知，瞬态响应 $c_t(t) = Te^{-\frac{1}{T}t}$ ，稳态响应 $c_{ss}(t) = t - T$ 。一阶系统跟踪单位斜坡输入的误差为

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

其稳态值 $e(\infty)$ 可由上式或利用拉普拉斯变换终值定理求得，即

$$e(\infty) = [r(t) - c(t)] \Big|_{t \rightarrow \infty} = (T - Te^{-\frac{1}{T}t}) \Big|_{t \rightarrow \infty} = T$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [R(s) - C(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \frac{1}{Ts+1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{Ts}{Ts+1} = T$$

单位斜坡响应曲线如图 3-5b 所示，可以看出，当 t 足够大时，一阶系统跟踪单位斜坡输入的误差稳态值等于时间常数 T 。

3. 单位脉冲响应

对于单位脉冲输入 $r(t) = \delta(t)$ 、 $R(s) = 1$ ，得

$$C(s) = R(s) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{R(s)}$$

因而，单位脉冲响应的拉普拉斯变换与系统的传递函数相同，即

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{\frac{1}{T}}{s + \frac{1}{T}}$$

对 $C(s)$ 进行拉普拉斯反变换，得到单位脉冲响应 $c(t)$ 为

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \quad (t \geq 0) \quad (3-17)$$

由式(3-4)、式(3-5)及相关定义可知，瞬态响应 $c_1(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t}$ ，稳态响应 $c_{ss}(t) = 0$ 。单位脉冲响应曲线如图 3-5c 所示，为单调下降的指数曲线。

4. 线性定常系统的重要性质

线性系统满足叠加原理，线性定常系统同样也满足叠加原理，如线性定常系统在给定输入 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 作用下的时间响应分别为 $c_1(t)$ 、 $c_2(t)$ ，则有

$$k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t) \xrightarrow{\text{时间响应}} k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t) \quad (k_1, k_2 \text{ 为常数})$$

进一步，通过分析一阶系统的单位阶跃、单位斜坡、单位脉冲三种输入信号之间的关系，以及三种输入信号所对应的时间响应的关系，可以发现：**输入信号导数的时间响应等于该输入信号时间响应的导数，输入信号积分的时间响应等于该输入信号时间响应的积分**，例如

$$\begin{aligned} 1(t) &\xrightarrow{\text{时间响应}} 1 - e^{-\frac{1}{T}t} \\ \delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) &\xrightarrow{\text{时间响应}} \frac{d}{dt} (1 - e^{-\frac{1}{T}t}) = \frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t} \\ t = \int_0^t 1(t) dt &\xrightarrow{\text{时间响应}} \int_0^t (1 - e^{-\frac{1}{T}t}) dt = t - T + T e^{-\frac{1}{T}t} \end{aligned}$$

这是线性定常系统所特有的性质。

基于这一性质，对线性定常系统只需要讨论一种典型信号的响应，就可以推知其他。因此，在对二阶和高阶系统的讨论中，主要研究系统的单位阶跃响应。

3.2.3 一阶系统的瞬态性能指标

一阶系统仅有参量 T ，因而一阶系统单位阶跃响应的瞬态性能指标只与 T 有关。

1. 延迟时间 t_d

根据 t_d 定义，有

$$c(t_d) = 0.5c(\infty)$$

由式(3-15)得

$$c(t_d) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t_d} = 0.5$$

整理得

$$t_d = -T \ln(1-0.5) = T \ln \frac{1}{1-0.5}$$

所以

$$t_d = 0.7T \quad (3-18)$$

2. 上升时间 t_r

根据 t_r 定义, 有

$$c(t_{0.1}) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t_{0.1}} = 0.1$$

$$c(t_{0.9}) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t_{0.9}} = 0.9$$

整理得

$$t_{0.1} = -T \ln(1-0.1) = T \ln \frac{1}{1-0.1}$$

$$t_{0.9} = -T \ln(1-0.9) = T \ln \frac{1}{1-0.9}$$

所以

$$t_r = t_{0.9} - t_{0.1} = 2.2T \quad (3-19)$$

3. 调整时间 t_s

根据 t_s 定义, 有

$$c(t_s) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t_s} = 1 - \Delta$$

整理得

$$t_s = -T \ln \Delta = T \ln \frac{1}{\Delta}$$

所以

$$t_s = \begin{cases} 3T & (\Delta = 5\%) \\ 4T & (\Delta = 2\%) \end{cases} \quad (3-20)$$

综上所述, 时间常数 T 反映了系统的惯性, 表征了系统过渡过程的品质: T 越小, 惯性越小, 系统的响应越快。一阶系统不存在峰值时间和最大超调量。

3.3 二阶系统的时域分析

3.3.1 二阶系统的数学模型

若活塞和活塞杆的质量不能忽略, 液压缸可抽象为图 3-6 所示的质量-弹簧-阻尼系统, 该系统独立储能元件数目为 2, 为二阶系统。油液施加到活塞的作用力 $F(t) = A_p(t)$, 以油液作用力 $F(t)$ 为输入, 位移 $x(t)$ 为输出, 求得微分方程为

$$m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

传递函数为

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{k} \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{k} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中, ω_n 为无阻尼振荡频率(或称自然频率(Natural Frequency)), 单位为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$; ζ 为阻尼比(黏性阻尼系数与临界阻尼系数之比), 为量纲一的量(旧称无量纲量), $\zeta = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$ 。

由此可见, ω_n 和 ζ 只决定于系统参量而与输入无关。可以用 ω_n 和 ζ 两个特征参量来普遍地描述各种二阶系统的动态特性。我们熟悉的一些现象, 如钟铃、车辆悬架系统以及电路在受到冲击后的短暂振动, 都是二阶系统时间响应常见的外在表现。

二阶系统传递函数的一般形式为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-21)$$

系统增益 K 仅影响时间响应的幅值, 因而研究系统增益 $K=1$ 具有普遍意义, 此时二阶系统的传递函数写成如下标准形式, 即

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-22)$$

对应的框图如图 3-7 所示。

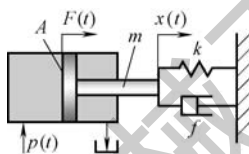


图 3-6 二阶系统

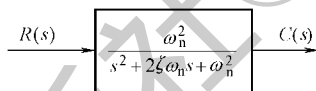


图 3-7 二阶系统框图

3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

对单位阶跃输入 $r(t) = 1(t)$, 则 $R(s) = \frac{1}{s}$, 得

$$C(s) = R(s) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-23)$$

对式(3-23)进行拉普拉斯反变换, 可求得二阶系统的单位阶跃响应。

二阶系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

其根(即系统极点)为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-24)$$

由特征方程的根与系数关系或式(3-24)可知：当 $\zeta = 1$ 、 $\zeta > 1$ 、 $0 < \zeta < 1$ 、 $\zeta = 0$ 时，特征方程的根分别为重负实根、互异负实根、负实部共轭复根、共轭虚根。这4种情况下，系统极点在 s 平面(即复平面)的分布如图 3-8a 所示，其中，当 $0 \leq \zeta \leq 1$ 时，系统极点距原点的距离为 ω_n ，即 $|s_1| = |s_2| = \omega_n$ 。

系统极点在 s 平面上不同的分布决定其不同的时间响应。下面分别对二阶系统在这4种情况下的单位阶跃响应进行讨论。

1. $\zeta = 1$ ，临界阻尼情况

由式(3-24)得

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

系统有两个重负实数极点，如图 3-8a 所示。

这时式(3-23)变成

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \omega_n + \omega_n}{(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \left[\frac{1}{s + \omega_n} + \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right]$$

对 $C(s)$ 进行拉普拉斯反变换，求得单位阶跃响应 $c(t)$ 为

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0) \quad (3-25)$$

图 3-8b 中表示了临界阻尼二阶系统的单位阶跃响应，它既无超调，也无振荡。

2. $\zeta > 1$ ，过阻尼情况

由式(3-24)得

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

系统有两个互异负实数极点($s_1 > -\omega_n$, $s_2 < -\omega_n$)，如图 3-8a 所示。

这时式(3-23)变成

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{s} - \left(\frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} \right)$$

系统极点 s_1 、 s_2 处的留数分别为

$$k_1 = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}, \quad k_2 = \frac{-1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

对 $C(s)$ 进行拉普拉斯反变换，求得单位阶跃响应 $c(t)$ 为

$$c(t) = 1 - k_1 e^{s_1 t} - k_2 e^{s_2 t} \quad (t \geq 0) \quad (3-26)$$

式(3-26)包含两个指数衰减项， $c(t)$ 不会超过稳态值 1。图 3-8b 中表示了过阻尼二阶系统的单位阶跃响应，它既无超调，也无振荡，上升时间和调整时间均比临界阻尼的长。

3. $0 < \zeta < 1$ ，欠阻尼情况

由式(3-24)得

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

系统有一对负实部共轭复数极点，如图 3-8a 所示。 $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ 为阻尼振荡频率

(Damping Oscillation Frequency), 记为 ω_d , 即

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (3-27)$$

可见, 阻尼振荡频率 ω_d 小于无阻尼振荡频率 ω_n 。

这时式(3-23)可以写成

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{1}{s} - \left[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{\zeta \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right]$$

对 $C(s)$ 进行拉普拉斯反变换, 求得单位阶跃响应 $c(t)$ 为

$$c(t) = 1 - \left(e^{-\zeta\omega_n t} \cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t \right) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos\omega_d t + \zeta \sin\omega_d t) \quad (3-28)$$

注意图 3-8a 阴影三角形中的 θ , $\sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}$, $\cos\theta = \zeta$, 上式整理得

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (t \geq 0) \quad (3-29)$$

式中, θ 为阻尼角, $\theta = \arccos\zeta$ 。

图 3-8b 表示了欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应, 它呈现为 **衰减振荡** 过程 ($0 < \sigma_p \% < 100\%$), 振荡频率是阻尼振荡频率 ω_d , 其振幅按指数曲线衰减, 两者均由系统参量 ζ 和 ω_n 决定。

4. $\zeta=0$, 无阻尼情况

由式(3-24)得

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

系统有一对共轭虚数极点(此时, 系统处于临界稳定状态, 临界稳定在工程上属不稳定, 见 3.5 节), 如图 3-8a 所示。

将 $\zeta=0$ 代入式(3-29)可得

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t \quad (t \geq 0) \quad (3-30)$$

图 3-8b 表示了无阻尼二阶系统的单位阶跃响应, 它呈现了 **等幅振荡** 过程 ($\sigma_p \% = 100\%$), 振荡频率为 ω_n 。

从上面的分析可以看出, ω_n 和 ω_d 的物理意义如下:

1) ω_n 是无阻尼二阶系统等幅振荡的振荡频率, 因此称为无阻尼振荡频率(或称自然频率)。

2) ω_d 是欠阻尼二阶系统衰减振荡的振荡频率, 因此称为阻尼振荡频率, $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 。

3) 相应地, 把 T_n 称为无阻尼振荡周期, $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$; T_d 称为阻尼振荡周期, $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ 。

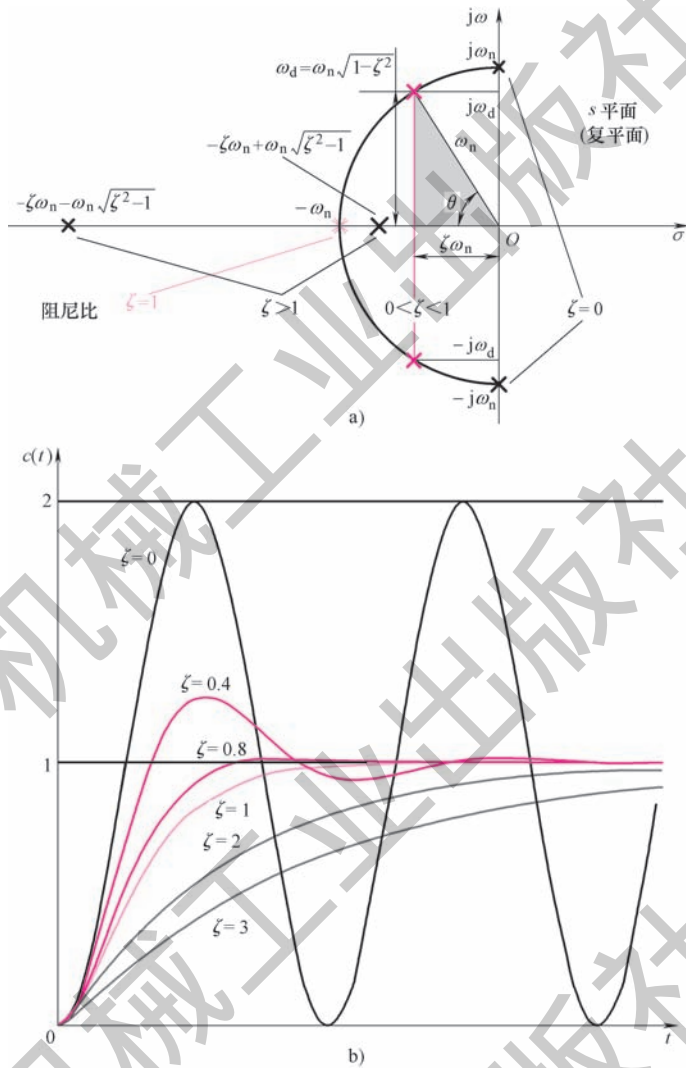


图 3-8 二阶系统极点分布与对应的阶跃响应

a) 极点分布 b) 阶跃响应

4) 当参量 ω_n 相同时, 无阻尼振荡周期小于阻尼振荡周期, 即 $T_n < T_d$; 阻尼比越大, 阻尼振荡周期越长, 如图 3-8 所示。

同时, 也可以看出 ζ 对二阶系统单位阶跃响应的影响如下:

- 1) ζ 越小, 上升越快。
- 2) 在 $\zeta \geq 1$ 的情况下, 响应具有单调上升的特性。系统的响应速度, 以 $\zeta=1$ 时为最短。
- 3) 在 $0 \leq \zeta < 1$ 的情况下, ζ 越小, 振荡越大; 当 $\zeta=0$ 时, 呈现出等幅振荡。

3.3.3 欠阻尼二阶系统的瞬态性能指标

二阶系统的特征参量 ζ 和 ω_n 直接关系到系统的瞬态响应。分析 ζ 和 ω_n 与瞬态性能指

标的关系，可指出设计和调整二阶系统的方向。除那些不允许产生振荡的控制系统外，通常允许有适度的振荡特性，以求能有较短的响应时间。因此，系统经常工作在欠阻尼状态。

下面给出欠阻尼二阶系统的瞬态性能指标计算公式。

1. 上升时间 t_r

根据 t_r 定义，先求满足 $c(t) = c(\infty)$ 的时间 t 。由式 (3-29) 得

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) = 1$$

即

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta) = 0$$

由于 $e^{-\zeta\omega_n t} \neq 0$ ，所以

$$\sin(\omega_d t + \theta) = 0$$

则

$$\omega_d t + \theta = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

即

$$t = \frac{k\pi - \theta}{\omega_d} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

再取 $t_r = \min t$ ，得

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3-31)$$

由式 (3-31) 可知：

1) 当 ζ 一定时，则阻尼角 θ 不变，系统的响应速度与 ω_n 成正比，即 ω_n 越大， t_r 越小，响应越快。

2) 当 ω_n 一定时， ζ 越小， t_r 也越小 (分子 $(\pi - \arccos \zeta)$ 变小、分母 $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 变大)，响应越快。

2. 峰值时间 t_p

根据 t_p 定义，有 $c(t_p) = c_{\max}$ ，因而 $\dot{c}(t_p) = 0$ ，即

$$\begin{aligned} \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} &= \zeta \omega_n \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_p + \theta) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_d \cos(\omega_d t_p + \theta) = \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\zeta \sin(\omega_d t_p + \theta) - \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t_p + \theta)] = \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\cos\theta \sin(\omega_d t_p + \theta) - \sin\theta \cos(\omega_d t_p + \theta)] = \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t_p = 0 \end{aligned}$$

所以

$$\sin \omega_d t_p = 0$$

上面三角方程在数学意义上的解为

$$\omega_d t_p = k\pi \quad (k=1, 2, \dots)$$

实际上, 峰值时间 t_p 对应于第一个峰值, 因而有

$$\omega_d t_p = \pi$$

所以

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-32)$$

阻尼振荡周期 $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$, 因而峰值时间是阻尼振荡周期的一半, 即 $t_p = \frac{1}{2}T_d$ 。由式

(3-32)可以看出:

- 1) 当 ζ 一定时, ω_n 越大, t_p 越小, 响应越快。
- 2) 当 ω_n 一定时, ζ 越小, t_p 也越小, 响应越快。

3. 最大超调量 $\sigma_p\%$

根据 $\sigma_p\%$ 定义, 结合式(3-29)和式(3-32), 可以求出超过稳态值 $c(\infty)$ 的最大偏离量 σ_p 为

$$\sigma_p = c(t_p) - c(\infty) = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_p + \theta) = e^{-\zeta\omega_n t_p} = e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}} = \exp\left(-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

最大超调量 $\sigma_p\%$ 为

$$\sigma_p\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = \frac{\sigma_p}{c(\infty)} \times 100\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\% \quad (3-33)$$

可见, 最大超调量只是 ζ 的函数, 而与 ω_n 无关。 ζ 越小, $\sigma_p\%$ 越大。不同阻尼比的最大超调量 $\sigma_p\%$ 见表 3-1。

表 3-1 不同阻尼比的最大超调量 $\sigma_p\%$

ζ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\sigma_p\%$	72.92%	52.66%	37.23%	25.38%	16.30%	9.48%	4.60%	1.52%	0.15%

由式(3-33)可得

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\ln \sigma_p\%)^2}{\pi^2 + (\ln \sigma_p\%)^2}}$$

因此, 若已知最大超调量 $\sigma_p\%$, 可求出阻尼比 ζ 。

4. 调整时间 t_s

阶跃响应曲线开始进入偏离稳态值 $\pm\Delta$ 的误差带 (Δ 取 5% 或 2%), 并从此不再超越这个范围的时间为系统的调整时间 t_s 。显然, t_s 越小, 表示系统动态调整过程越快。对于欠阻尼二阶系统单位阶跃响应式(3-29), 指数曲线 $1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ 是其对称于 $c(\infty)=1$ 的一对包

络线，整个响应曲线总是包含在这一对包络线之内，如图 3-9 所示。

往往采用包络线代替实际响应来估算调整时间。由图 3-9 可见，不管采用上包络线还是下包络线，都可以得到同样的估算结果：

$$1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 + \Delta \quad \text{或} \quad 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 - \Delta$$

即

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta$$

由上式求得

$$t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left(\ln \frac{1}{\Delta} + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (3-34)$$

由图 3-9 可知，式 (3-34) 所得结果

(即估算值)要大于实际值，结果比较保守，因而忽略 $\ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ ，通常采用如下近似式计算

$$t_s \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta} = \begin{cases} \frac{3}{\zeta\omega_n} & (\Delta = 5\%) \\ \frac{4}{\zeta\omega_n} & (\Delta = 2\%) \end{cases} \quad (3-35)$$

分析可知， ω_n 大，调整时间 t_s 就小。 ζ 与 t_s 的关系不能用式 (3-34) 和式 (3-35) (即包络线估算和近似式) 来看。精确计算表明， ζ 有个临界值 ζ_c (约为 0.68)，当 $\zeta < \zeta_c$ 时， ζ 大， t_s 就小，这与 t_p 、 t_r 和 ζ 的关系正好相反；当 $\zeta > \zeta_c$ 时， ζ 小， t_s 就小。通常， ζ 值是根据允许最大超调量 $\sigma_p\%$ 确定的，因此 t_s 可以根据 ω_n 来确定。这样，在不改变最大超调量的情况下，通过调整 ω_n ，可以改变 t_s 。

需要注意， t_s 近似式是源于包络线估算的近似，有时会有较大误差。例如，当 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、

$\Delta = 5\%$ 时，用包络线估算求得 $t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left(\ln \frac{1}{\Delta} + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) = \frac{4.7}{\omega_n}$ ，用包络线估算的近似式求得

$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{4.2}{\omega_n}$ ，实际的调整时间 $t_s = \frac{2.9}{\omega_n}$ (用 MATLAB 求得，有关 MATLAB 内容见附录 A)，

而上升时间 $t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{3.3}{\omega_n}$ ，实际的调整时间 $t_s < t_r$ 。

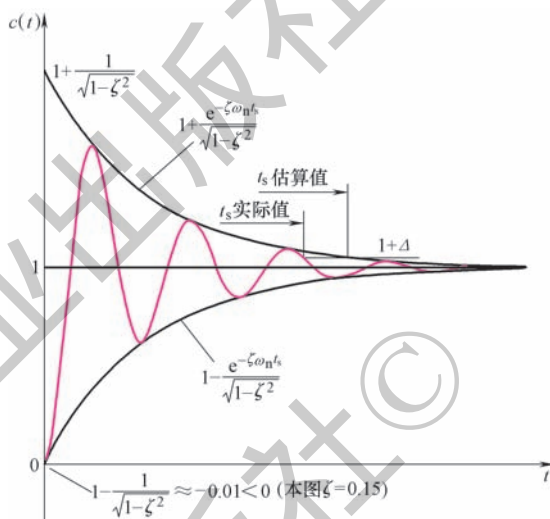


图 3-9 单位阶跃响应曲线的包络线

5. ζ 、 ω_n 与瞬态性能指标间的关系分析

综上所述, 可将特征参量 ζ 、 ω_n 与各瞬态性能指标间的关系归纳如下:

1) 二阶系统的瞬态响应特性由 ζ 和 ω_n 共同决定, 欲使二阶系统具有满意的瞬态性能指标, 必须综合考虑 ζ 和 ω_n 的影响, 选取合适的 ζ 和 ω_n 。

2) 若保持 ζ 不变而增大 ω_n , 则对最大超调量无影响, 却可以使上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 和调整时间 t_s 变小, 即可以提高系统的快速性。所以增大 ω_n 对提高系统性能是有利的。

3) 若保持 ω_n 不变而增大 ζ 值, 则会使最大超调量 $\sigma_p\%$ 减小, 减弱系统的振荡性能, 增加相对稳定性。对上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 而言, 减小 ζ 值, 会使 t_r 、 t_p 变小。对调整时间 t_s 而言, 当 $\zeta < \zeta_c$ 时, 随着 ζ 的增大, t_s 变小; 而当 $\zeta > \zeta_c$ 时, 随着 ζ 的增大, t_s 变大, 系统的快速性变差。

4) 综合考虑系统的相对稳定性和快速性, 通常取 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$, 这时系统的最大超调量为 25.4% ~ 1.5%。若 $\zeta < 0.4$, 则系统超调严重, 相对稳定性差; 若 $\zeta > 0.8$, 则系统反应迟钝, 灵敏性差。当 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ 时, $\sigma_p\%$ (为 4.32%) 和 t_s 均较小 (当 $\Delta = 5\%$ 时, $t_s < t_r$), 称 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ 为**最佳阻尼比**(从频域分析角度对最佳阻尼比的说明见 4.2.2 节的“振荡环节”)。

6. 分析计算实例

例 3-1 某控制系统如图 3-10 所示。

1) 试确定 $K=4$ 时系统的特征参量 ω_n 和 ζ 。

2) 试求出 $K=4$ 时系统的最大超调量 $\sigma_p\%$ 和调整时间 t_s ($\Delta = 5\%$)。

3) 若采用最佳阻尼比 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 试确定系统的开环增益 K 值。

解 系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{K}{s^2+Ts+K} = \frac{K}{s^2+s+K}$$

将上式的特征方程 $s^2+s+K=0$ 与二阶系统的特征方程 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$ 相比, 可得

$$\omega_n^2 = K, \quad 2\zeta\omega_n = 1$$

1) 计算得

$$\omega_n = \sqrt{K} = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \zeta = \frac{1}{2\omega_n} = 0.25$$

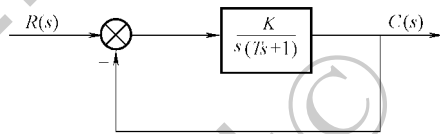


图 3-10 例 3-1 图

2) 最大超调量 $\sigma_p\%$ 由式(3-33)确定, 即

$$\sigma_p\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\% = 44\%$$

调整时间 t_s 由式(3-35)确定, 即

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = 6 \text{ s } (\Delta = 5\%)$$

3) 由 $\omega_n^2 = K$, 求出

$$K = \omega_n^2 = \left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = 0.5$$

例 3-2 某控制系统如图 3-11 所示, 若要求系统具有性能指标 $\sigma_p\% = 20\%$ 、 $t_p = 1 \text{ s}$, 试确定系统参量 K 、 τ , 并计算上升时间 t_r 和调整时间 t_s ($\Delta = 2\%$)。

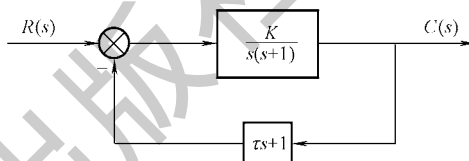


图 3-11 例 3-2 图

解 首先, 求出系统闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}(\tau s + 1)} = \frac{K}{s^2 + (1 + K\tau)s + K}$$

将上式的特征方程 $s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$ 与二阶系统的特征方程 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 相比, 得

$$\omega_n^2 = K, \quad 2\zeta\omega_n = 1 + K\tau$$

由 $\sigma_p\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\% = 20\%$, 解得

$$\zeta = \frac{\sqrt{(\ln\sigma_p\%)^2}}{\sqrt{\pi^2 + (\ln\sigma_p\%)^2}} = 0.456$$

再由 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 1$, 解得

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

从而解得

$$K = \omega_n^2 = 12.46$$

$$\tau = \frac{2\zeta\omega_n - 1}{K} = 0.178$$

由上升时间 t_r 和调整时间 t_s 公式, 计算得

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.65 \text{ s}$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} = 2.48 \text{ s} \quad (\Delta = 2\%)$$

3.4 高阶系统的时域分析

高阶系统传递函数的一般形式为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (n \geq m)$$

对于单位阶跃输入 $R(s) = \frac{1}{s}$, 输出 $C(s)$ 为

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{N(s)}{D(s)}$$

在实际控制系统中, 闭环极点 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ 通常两两互异, 假定闭环极点中有 q 个实数极点 $s_i (i=1, 2, \dots, q)$, 其余闭环极点 $s_i (i=q+1, q+2, \dots, n-q)$ 为 r 对复数极点 $\sigma_l \pm j\omega_l (l=1, 2, \dots, r)$, 且 $q+2r=n$ 。对 $C(s)$ 分母进行因式分解, 部分分式展开

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{\frac{N(s)}{a_n}}{\prod_{i=1}^q (s - s_i) \prod_{l=1}^r (s^2 - 2\sigma_l s + \sigma_l^2 + \omega_l^2)} = \frac{K}{s} + \sum_{i=1}^q \frac{k_i}{s - s_i} + \sum_{l=1}^r \frac{A_l s + B_l}{s^2 - 2\sigma_l s + \sigma_l^2 + \omega_l^2} \quad (3-36)$$

式中, $K = \frac{b_0}{a_0}$; k_i 为极点 $s_i (i=1, 2, \dots, q)$ 处的留数; A_l, B_l 为系数, 可由 2.2.2 节方法求解。

对式(3-36)进行拉普拉斯反变换, 求得系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = K + \sum_{i=1}^q k_i e^{s_i t} + \sum_{l=1}^r C_l e^{\sigma_l t} \sin(\omega_l t + \theta_l) \quad (t \geq 0) \quad (3-37)$$

式中, C_l, θ_l 可由 2.2.2 节方法求解。

综上所述:

1) 高阶系统的瞬态响应通常由一阶系统瞬态响应分量(模态为 $e^{s_i t}$)和二阶系统瞬态响应分量(模态为 $e^{\sigma_l t} \sin(\omega_l t + \theta_l)$)组成。输入信号极点对应的拉普拉斯反变换为时间响应的稳态分量。传递函数极点对应的拉普拉斯反变换为时间响应的瞬态分量。极点在左半 s 平面距虚轴越远, 相应的瞬态分量衰减越快。

2) 如果所有的闭环极点 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ 均具有负实部(即 $\text{Re}(s_i) < 0$), 由式(3-37)可知, 随着时间的推移, 式中所有的瞬态分量将不断衰减, 最后该式的右方只剩下由

输入信号的极点所确定的稳态分量 K 。这意味着，当 $\text{Re}(s_i) < 0$ 时，过渡过程结束后，系统的被控制量仅与其控制输入信号有关。

3) 在高阶系统的闭环极点中，如果距虚轴最近的闭环极点，其周围没有零点，而且其他闭环极点距虚轴的距离是该极点距虚轴的 5 倍以上，则可以认为系统的响应主要由该极点决定，这种极点称为主导极点。高阶系统的主导极点常是共轭复数极点。在设计一个高阶系统时，常利用主导极点来选择系统的参量，使系统具有预期的一对主导极点，从而把高阶系统近似地用一对主导极点所描述的二阶系统去表征。

3.5 稳定性及其劳斯稳定判据

稳定是控制系统能够正常工作并完成预期控制任务的前提，在系统稳定的前提下方能分析讨论快速性和准确性，因而稳定性是控制系统的首要性能。确保闭环控制系统稳定是控制系统设计的重要内容。许多物理系统原本是开环不稳定的，有的甚至被故意设计成开环不稳定的。例如，大部分现代战斗机出于操纵性和机动性要求都被设计成开环不稳定的系统，如果不引入反馈系统来协助飞行员实施主动驾驶控制，这些战斗机就不能飞行。这时要引入主动控制，使不稳定的系统变得稳定，并保证瞬态性能指标等技术指标满足要求。由此可见，可以利用反馈环节使不稳定系统变得稳定，并通过选择合适的控制器参量，来调节系统的瞬态性能(有关反馈的更多作用，见 5.4.1 节)。对于开环稳定的对象，可以利用反馈来调节闭环性能，以便满足设计指标要求。本节的主要内容包括稳定性的概念、线性定常系统稳定的充要条件和劳斯稳定判据。

3.5.1 稳定性的概念

下面讨论经典控制理论中关于系统稳定性的概念。假设某系统处于正常的工作状态(可认为其处于平衡状态)，受到扰动作用后将会偏离平衡状态，但在扰动消失且没有任何外部信号作用下，系统以自身的结构与参量特征能够逐渐恢复到平衡状态，则称该系统是稳定的。从系统的微分方程输出解 $c(t)$ 的角度讲，如果系统的自由响应(即零输入响应)解是收敛的，则系统是稳定的，如图 3-12a 所示；否则，系统就是不稳定的，包括图 3-12b 所示的发散响应形式和图 3-12c 所示的等幅振荡形式(严格来讲，等幅振荡情况属于临界稳定，但经典控制理论中将其归于不稳定)。由此可知，稳定性是表征系统在扰

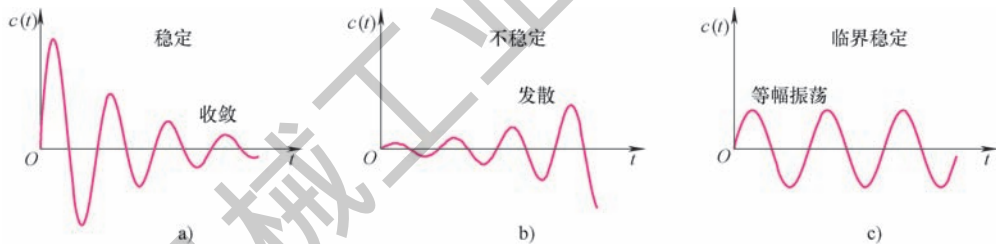


图 3-12 系统稳定性示意图